Κεφάλαιο 9

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Ας θεωρήσουμε την γραμμική απεικόνιση $f : X \to X$. Υπάρχουν διανύσματα $v \in X$ τα οποία έχουν την ιδιότητα $f(v) = \lambda v$. Τα διανύσματα αυτά ονομάζονται *ιδιοδιανύσματα* της γραμμικής απεικόνισης *f*, ενώ οι τιμές του *λ* για τις οποίες ισχύει η σχέση αυτή ονομάζονται *ιδιοτιμές* της γραμμικής απεικόνισης. Οι χώροι των διανυσμάτων *v* που αντιστοιχούν σε μια συγκεκριμένη ιδιοτιμή *λ* αποτελούν διανυσματικούς υπόχωρους του X τους οποίους και θα ονομάσουμε *ιδιόχωρους* της συγκεκριμένης ιδιοτιμής. Βασικός στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι να διατυπώσει μια μεθοδολογία εύρεσης των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων μιας γραμμικής απεικόνισης μέσω του πίνακα της γραμμικής απεικόνισης. Στη συνέχεια παρουσιάζονται ορισμένες ιδιότητες των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων πινάκων/γραμμικών απεικονίσεων, ενώ στο τέλος παρουσιάζουμε το Θεώρημα Cayley-Hamilton και εφαρμογές του στον υπολογισμό: α) του αντίστροφου ενός πίνακα, β) μαθηματικών παραστάσεων που εξαρτούνται από έναν πίνακα (όπως οι δυνάμεις ενός πίνακα), και γ) του ελάχιστου πολυωνύμου ενός πίνακα.

9.1 Ορισμοί

Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 - 5x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$$

Είναι γνωστό από το κεφάλαιο 8.4 ότι ο πίνακας της παραπάνω γραμμικής απεικόνισης, ως προς την κανονική βάση $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T \right\}$ είναι ο

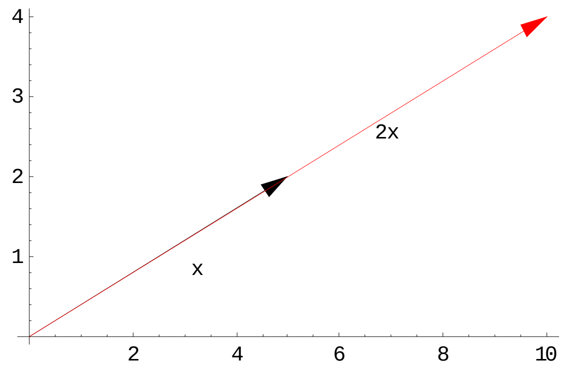
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Έστω επίσης το διάνυσμα $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}^T$. Παίρνοντας το γινόμενο του Ax διαπιστώνουμε ότι είναι ίσο με

$$f\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 2x, x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

και συνεπώς είναι πολλαπλάσιο του x.



Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε αν υπάρχουν επιπλέον διανύσματα με την ίδια ιδιότητα. Θα πρέπει τα διανύσματα αυτά να ικανοποιούν την ιδιότητα :

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4x_1 - 5x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (\lambda-4)x_1 + 5x_2 = 0 \\ -2x_1 + (\lambda+3)x_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Προκειμένου να έχει λύση το παραπάνω ομογενές σύστημα θα πρέπει

$$\det\begin{bmatrix} \lambda-4 & 5 \\ -2 & \lambda+3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-4)(\lambda+3) - (-2)\times 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = -1$$

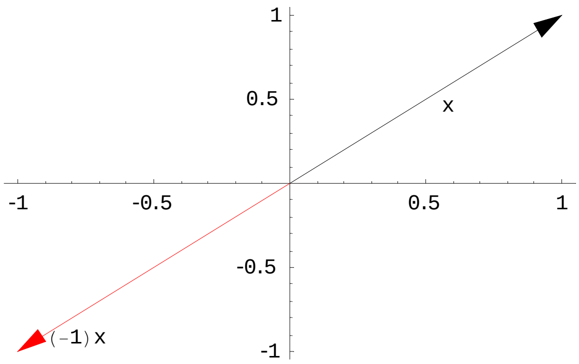
Συνεπώς εκτός από $\lambda = 2$ η παραπάνω ιδιότητα ισχύει και για $\lambda = -1$. Επιλύνοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων για $\lambda = -1$ θα έχουμε

$$\begin{Bmatrix} -5x_1 + 5x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow x = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R}$$

Άρα θα έχουμε

$$f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-5\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$f(x)=(-1)x, x=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$



Η ιδιότητα αυτή των συγκεκριμένων διανυσμάτων *x* της γραμμικής απεικόνισης αλλά και των αριθμών *λ* που περιγράψαμε στο παραπάνω παράδειγμα περιγράφεται από τον παρακάτω ορισμό :

9.1.1 Ορισμός

*Έστω X ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) και $f: X \to X$ μια γραμμική απεικόνιση. Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x \in X$ ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** της γραμμικής απεικόνισης εάν υπάρχει αριθμός $\lambda \in K$, τέτοιος ώστε*

$$f(x)=\lambda x$$

*Ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** της γραμμικής απεικόνισης. Συνολικά οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ονομάζονται **ιδιοποσά** ή **χαρακτηριστικά μεγέθη** της γραμμικής απεικόνισης. Ο χώρος*

$$V_\lambda=\{x : x \in X \text{ και } f(x)=\lambda x\}$$

*ονομάζεται **ιδιόχωρος** που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.* ■

9.1.2 Παράδειγμα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η οποία δίνεται από την σχέση

$$f(x_1,x_2)=(-5x_1+3x_2, 6x_1-2x_2)$$

Να υπολογιστούν τα ιδιοποσά της παραπάνω απεικόνισης.

Απάντηση

Προσπαθούμε να λύσουμε την σχέση

$$f(x_1,x_2)=(-5x_1+3x_2, 6x_1-2x_2)=\lambda(x_1,x_2)$$

ή ισοδύναμα την σχέση

$$\underbrace{\begin{pmatrix}-5&3\\6&-2\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}}_{x}=\lambda\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}}_{x}$$

όπου *A* είναι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης. Η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{pmatrix} \lambda+5 & -3 \\ -6 & \lambda+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν

$$\det\begin{pmatrix} \lambda+5 & -3 \\ -6 & \lambda+2 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda^2+7\lambda-8=0 \Leftrightarrow (\lambda+8)(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow \lambda=-8 \vee \lambda=1$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές της γραμμικής απεικόνισης *f* είναι $\lambda=-8$ & $\lambda=1$. Για $\lambda=-8$ το παραπάνω σύστημα γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1=-x_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2\in\mathbb{R}$$

Άρα το $(-1,1)$ αποτελεί ένα ιδιοδιάνυσμα της γραμμικής απεικόνισης f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda=-8$. Επίσης

$$V_{-8}=\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}k, k\in\mathbb{R}\right\}$$

Για $\lambda=1$ το παραπάνω σύστημα γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_2=2x_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x_1\in\mathbb{R}$$

Άρα το $(1,2)$ αποτελεί ένα ιδιοδιάνυσμα της γραμμικής απεικόνισης *f* που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda=1$. Επίσης

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}k, k\in\mathbb{R}\right\}$$ ■

Ας υποθέσουμε ότι ο διανυσματικός χώρος X πάνω στο $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ είναι πεπερασμένης διάστασης με βάση την $\{e_1,e_2,...,e_n\}$. Έστω επίσης $f:X\to X$ μια γραμμική απεικόνιση και $A=(a_{ij})$ ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης για την βάση αυτή. Τότε θα έχουμε :

9.1.3 Πρόταση

Ο αριθμός $\lambda\in\mathbb{R}(\mathbb{C})$ αποτελεί ιδιοτιμή της γραμμικής απεικόνισης $f:X\to X$ αν και μόνο αν

$$\det[\lambda I_n - A]=0$$

ενώ τα ιδιοδιανύσματα της γραμμικής απεικόνισης f που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ είναι τα διανύσματα που ικανοποιούν την εξίσωση :

$$(\lambda I_n - A)x=0$$

Απόδειξη

Ο αριθμός $\lambda\in\mathbb{R}(\mathbb{C})$ αποτελεί ιδιοτιμή της γραμμικής απεικόνισης $f:X\to X$ σύμφωνα με τον Ορισμό 9.1.1 εάν και μόνο εάν

$$f(x)=\lambda x \Leftrightarrow Ax=\lambda x \Leftrightarrow (\lambda I_n - A)x=0$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει μη μηδενικές λύσεις εάν και μόνο εάν $\det[\lambda I_n - A]=0$ που αποδεικνύει την πρόταση. ■

Λόγω της σύνδεσης αυτής μεταξύ : α) των ιδιοποσών (ιδιοτιμών / ιδιοδιανυσμάτων) μιας γραμμικής απεικόνισης και β) των χαρακτηριστικών στοιχείων του πίνακα της γραμμικής απεικόνισης (τιμές που μηδενίζουν το πολυώνυμο $\det\left[\lambda I_n - A\right]$ / διανύσματα που αποτελούν λύση του ομογενούς συστήματος $\left(\lambda I_n - A\right)x = 0$) δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

9.1.4 Ορισμός

Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n \left(\mathbb{C}^n\right)$ *ονομάζεται* ***δεξιό (αριστερό) ιδιοδιάνυσμα*** *ενός τετράγωνου πίνακα* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *εάν υπάρχει αριθμός* $\lambda \in \mathbb{R}\left(\mathbb{C}\right)$*, τέτοιος ώστε*

$$Ax = \lambda x \ \left(xA = \lambda x\right)$$

Ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}\left(\mathbb{C}\right)$ *ονομάζεται* ***ιδιοτιμή*** *του πίνακα Α. Συνολικά οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ονομάζονται* ***ιδιοποσά*** *ή* ***χαρακτηριστικά μεγέθη*** *του πίνακα.* ■

Στην θεωρία που αναφέρεται παρακάτω, όταν αναφερόμαστε στα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *A*, θα εννοούμε τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του πίνακα *A*.

9.1.5 Άσκηση αυτοαξιολόγησης

Προσδιορίστε ποιο από τα διανύσματα

$$x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ; \ x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ ; \ x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ; \ x_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

αποτελεί ιδιοδιάνυσμα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

και σε ποια ιδιοτιμή αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα αυτό. ■

Εύλογα ερωτήματα που γεννιούνται από τον ορισμό 9.1.4, είναι τα εξής :

1. υπάρχουν ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές για κάθε πίνακα *A* ;
2. ποιο είναι το πλήθος των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων ενός τετράγωνου πίνακα *A* ;
3. με ποιον τρόπο υπολογίζω τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός τετράγωνου πίνακα *A* ;

Θα ξεκινήσουμε με την απάντηση στο τρίτο ερώτημα, δηλαδή τον τρόπο εύρεσης των ιδιοδιανυσμάτων/ιδιοτιμών του πίνακα *A*. Από τον ορισμό, αν $x \in \mathbb{R}^n \left(\mathbb{C}^n\right)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}\left(\mathbb{C}\right)$ τέτοιο ώστε :

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow \underbrace{\left(\lambda I_n - A\right)}_{B} x = 0 \tag{9.1.1}$$

Στην περίπτωση που ο πίνακας $B = \lambda I_n - A$ έχει ορίζουσα διάφορη του μηδενός τότε η μόνη λύση που έχει το σύστημα (9.1.1) είναι η μηδενική ($x = 0_{3,1}$). Σε περίπτωση που η ορίζουσα του πίνακα $B = \lambda I_n - A$ είναι μηδέν, τότε υπάρχουν μη μηδενικές λύσεις $x \in \mathbb{R}^n$ του συστήματος (9.1.1). Συνεπώς το ιδιοδιάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει στην περίπτωση που

$$p(\lambda) := (\lambda I_n - A) = 0 \tag{9.1.2}$$

Σημείωση. Στα ίδια συμπεράσματα θα καταλήγαμε αν στην θέση του πίνακα $\lambda I_n - A$ παίρναμε τον πίνακα $A - \lambda I_n$ (γιατί;).

9.1.6 Ορισμός

Η εξίσωση (9.1.2) ονομάζεται ***χαρακτηριστική εξίσωση*** *του πίνακα* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, ενώ το πολυώνυμο p(λ), ονομάζεται* ***χαρακτηριστικό πολυώνυμο*** *του πίνακα* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*. Το σύνολο των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης, οι οποίες και αποτελούν τις ιδιοτιμές του πίνακα A, ονομάζεται* ***φάσμα*** *και συμβολίζεται με* $\sigma(A)$. ■

Από το *Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας*[1] το πλήθος των ριζών (και άρα των ιδιοτιμών $\lambda_i \in \mathbb{C}$) του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι *n*, όση δηλαδή και η διάσταση του πίνακα *A*.

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$
$$n_1 + n_2 + \cdots n_k = n$$

9.1.7 Ορισμός

Ο αριθμός των φορών που εμφανίζεται μια ιδιοτιμή στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A ονομάζεται ***αλγεβρική πολλαπλότητα*** *της ιδιοτιμής π.χ. αν* $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ *τότε η αλγεβρική πολλαπλότητα της* λ_i *είναι* n_i. ■

9.1.8 Παράδειγμα

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα *A* καθώς και η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής.

Απάντηση

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A :

$$p(\lambda) = \det[\lambda I_3 - A] = \det\left[\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 5 & -1 \\ -2 & \lambda+3 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$$
$$= (\lambda+1)\left[(\lambda+3)(\lambda-4) - (-2)5\right] = (\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

---

[1] Σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας κάθε μη-σταθερό πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο σώμα $\mathbb{C}$.

Από την μορφή του χαρακτηριστικού πολυωνύμου εύκολα συμπεραίνουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ είναι οι -1 και 2 με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και 1 αντίστοιχα. Το φάσμα του πίνακα A είναι $\sigma(A) = \{-1,-1,2\}$.

■

Για να υπολογίσουμε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, θα πρέπει για ***κάθε ιδιοτιμή*** $\lambda_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ να λύσουμε το ομογενές σύστημα $(\lambda_i I_n - A)x_i = 0$.

9.1.9 Ορισμός

Το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων V_{λ_i} που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, αποτελούν έναν διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, ο οποίος και ονομάζεται ***ιδιοχώρος*** *της ιδιοτιμής $\lambda_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Η διάσταση του ιδιοχώρου V_{λ_i} είναι ίση με $\dim V_{\lambda_i} = n - rank(\lambda_i I_n - A)$ και ονομάζεται* ***γεωμετρική πολλαπλότητα*** *της ιδιοτιμής $\lambda_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Αν συμβολίσουμε με n_i την αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει η σχέση $1 \le \dim V_{\lambda_i} \le n_i$.* ■

9.1.10 Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε τον πίνακα Α του παραδείγματος 9.1.8. Να υπολογιστούν οι ιδιόχωροι που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές -1 και 2, καθώς και η γεωμετρική πολλαπλότητα που αντιστοιχεί σε κάθε ιδιοτιμή.

Απάντηση

Γνωρίζουμε από το παράδειγμα 9.1.8 ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι :

$$p(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

Για την ιδιοτιμή -1 θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = (-1)\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 4x_1 - 5x_2 + x_3 = -x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -x_2 \\ -x_3 = -x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 5x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

Άρα ο ιδιοχώρος V_{-1} ορίζεται ως :

$$V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

και έχει διάσταση 1, δηλ. $\dim V_{-1} = 1$. Με το σύμβολο $\langle e_1 \rangle$ ορίζουμε τον διανυσματικό χώρο που παράγεται από το διάνυσμα e_1. Συνεπώς η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής -1 είναι 1 και είναι διαφορετική από την αλγεβρική της πολλαπλότητα που είναι 2.

Όμοια για την ιδιοτιμή 2 θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = 2\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 4x_1 - 5x_2 + x_3 = 2x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2x_2 \\ -x_3 = 2x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2x_1 - 5x_2 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = \dfrac{5}{2}x_2 \\ x_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

Άρα ο ιδιοχώρος V_2 ορίζεται ως :

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{2}x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

και έχει διάσταση 1, δηλ. $\dim V_2 = 1$. Συνεπώς η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 2 είναι 1, όσο δηλαδή και η αλγεβρική της πολλαπλότητα. ■

Όταν μας ζητείται ο υπολογισμός των ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, και όχι οι ιδιοχώροι που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές αυτές, αρκεί να επιλέξουμε μια βάση από κάθε υπόχωρο V_{λ_i}. Για ευκολία στις πράξεις στην θεωρία που θα ακολουθήσει, συνήθως διαλέγουμε ιδιοδιανύσματα με ακέραιες τιμές όπου αυτό είναι δυνατό. Στο παραπάνω παράδειγμα θα μπορούσαμε να ορίσουμε ότι ο ιδιοχώρος V_2 παράγεται από το διάνυσμα $2\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Μεθοδολογία υπολογισμού ιδιοτιμών/ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Βήμα 1. Εύρεση ιδιοτιμών του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

α) Υπολογισμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$p(\lambda) = \det[\lambda I_n - A] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 .$$

β) Υπολογισμός των ριζών $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ της χαρακτηριστικής εξίσωσης $p(\lambda)=0$.

Βήμα 2. Εύρεση των ιδιοδιανυσμάτων x_i του πίνακα A.

Επίλυση της εξίσωσης $Ax_i = \lambda_i x_i$ για $i = 1, 2, ..., n$.

9.1.11 Παράδειγμα

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *A*.

Λύση

Βήμα 1α. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα *A*.

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \left| \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-8)$$

Βήμα 1β. Υπολογίζουμε τις λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης *p(λ)*=0.

$$(\lambda-2)^2(\lambda-8) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 8$$

Επομένως $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 8$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και 1 αντίστοιχα.

Βήμα 2. Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα λύνουμε για ***κάθε*** ένα από τα λ, το ομογενές σύστημα $(\lambda I - A)x = 0$.

Για $\lambda_1 = 2$**,**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2x_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

επομένως ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 2 είναι ο παρακάτω

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_1, x_2 \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Παρατηρούμε ότι $\dim V_2 = 2$ και συνεπώς η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 2 είναι 2.

Για $\lambda_2 = 8$**,**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = 8 \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8x_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = \dfrac{x_2 + x_3}{2} \\ 2\dfrac{x_2 + x_3}{2} - 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = \dfrac{x_3 + x_3}{2} = x_3 \\ -3x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 \end{Bmatrix}$$

επομένως ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 8 είναι ο παρακάτω

$$V_8 = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Παρατηρούμε ότι $\dim V_8 = 1$ και συνεπώς η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 8 είναι 1. Συνεπώς και για τις δύο ιδιοτιμές ισχύει ότι η αλγεβρική τους πολλαπλότητα ταυτίζεται με την γεωμετρική πολλαπλότητα. Σε αντίθετη περίπτωση το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A θα ήταν μικρότερο από την διάσταση του πίνακα A. ■

MATHEMATICA 5

Παρακάτω χρησιμοποιούμε το υπολογιστικό σύστημα άλγεβρας *Mathematica* για να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *A*.

Ορισμός του πίνακα A

```
In[1]:= a = {{4, 2, 2}, {2, 4, 2}, {2, 2, 4}}
Out[1]= {{4, 2, 2}, {2, 4, 2}, {2, 2, 4}}
```

Υπολογισμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα.

```
In[2]:= p = Det[s * IdentityMatrix[3] - a]
```

Out[2]= $-32 + 36\,s - 12\,s^2 + s^3$

Επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

```
In[3]:= Solve[p == 0, s]
Out[3]= {{s → 2}, {s → 2}, {s → 8}}
```

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A θα μπορούσε να υπολογιστεί και με την συνάρτηση CharacteristicPolynomial.

```
In[4]:= CharacteristicPolynomial[a, s]
```

Out[4]= $32 - 36\,s + 12\,s^2 - s^3$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A θα μπορούσαν να υπολογιστούν επίσης με την συνάρτηση Eigenvalues.

```
In[5]:= Eigenvalues[a]
Out[5]= {8, 2, 2}
```

Υπολογισμός των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 2.

```
In[6]:= NullSpace[a - 2 * IdentityMatrix[3]]
Out[6]= {{-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}
```

Υπολογισμός των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 8.

```
In[7]:= NullSpace[a - 8 * IdentityMatrix[3]]
Out[7]= {{1, 1, 1}}
```

Τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A θα μπορούσαν να υπολογισθούν με την συνάρτηση Eigenvectors.

```
In[8]:= Eigenvectors[a]
Out[8]= {{1, 1, 1}, {-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}
```

Παρατηρούμε ότι το πρώτο ιδιοδιάνυσμα αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή που μας έδωσε η συνάρτηση Eigenvalues, ενώ τα υπόλοιπα δύο αντιστοιχούν στην δεύτερη-τρίτη ιδιοτιμή που επέστρεψε η συνάρτηση Eigenvalues. Θα μπορούσαμε επίσης να πάρουμε και τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα μας με την συνάρτηση Eigensystem που μας δίνει τα ιδιοποσά του συστήματος.

```
In[9]:= Eigensystem[a]

Out[9]= {{8, 2, 2}, {{1, 1, 1}, {-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}}
```

Η παραπάνω συνάρτηση επιστρέφει μια λίστα με στοιχεία 2 λίστες. Η πρώτη περιέχει τις ιδιοτιμές του πίνακα A, ενώ η δεύτερη τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές της πρώτης λίστας.

9.1.12 Παράδειγμα

Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Απάντηση

Βήμα 1α. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A.

$$p(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\left|\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -5 \\ 1 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+2)+5=\lambda^2+1$$

Βήμα 1β. Υπολογίζουμε τις λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης $p(\lambda)=0$[2].

$$\lambda^2+1=0\Rightarrow \lambda_1=i,\lambda_2=-i$$

όπου i ο φανταστικός αριθμός (δες κεφάλαιο 1, του 2^{ου} τόμου). Επομένως $\lambda_1=i$ και $\lambda_2=-i$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A με αλγεβρική πολλαπλότητα 1 η κάθε μια.

Βήμα 2. Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα λύνουμε για ***κάθε*** ένα από τα λ, το ομογενές σύστημα $(\lambda I-A)x=0$.

Για $\lambda_1=i$,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x}=i\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x}\Rightarrow\begin{Bmatrix} 2x_1+5x_2=ix_1 \\ -x_1-2x_2=ix_2 \end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} (2-i)x_1+5x_2=0 \\ -x_1-(2+i)x_2=0 \end{Bmatrix}\Rightarrow x_1=-(2+i)x_2$$

επομένως ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή i είναι ο παρακάτω

$$V_i=\left\{\begin{pmatrix} -(2+i) \\ 1 \end{pmatrix}x_2, x_2\in\mathbb{C}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix} -(2+i) \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle$$

---

[2] Σε περίπτωση που μας ενδιέφεραν οι ιδιοτιμές στο $\mathbb{R}$ τότε ο πίνακας μας δεν έχει ιδιοτιμές λόγω του ότι η εξίσωση $p(\lambda)=0$ δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$.

Για $\lambda_2 = -i$ **,**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = -i \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2x_1 + 5x_2 = -ix_1 \\ -x_1 - 2x_2 = -ix_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} (2+i)x_1 + 5x_2 = 0 \\ -x_1 - (2-i)x_2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow x_1 = -(2-i)x_2$$

επομένως ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -*i* είναι ο παρακάτω

$$V_{-i} = \left\{ \begin{pmatrix} -(2-i) \\ 1 \end{pmatrix} x_2, x_2 \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -(2-i) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

■

9.1.13 Παράδειγμα

Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Απάντηση

Βήμα 1α. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα *A*.

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \left| \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3) + 1 = (\lambda-2)^2$$

Βήμα 1β. Υπολογίζουμε τις λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης *p(λ)*=0.

$$(\lambda-2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2$$

Επομένως $\lambda_1 = 2$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα *A* με αλγεβρική πολλαπλότητα 2.

Βήμα 2. Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα λύνουμε για *λ=2*, το ομογενές σύστημα $(\lambda I - A)x = 0$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 - x_2 = 2x_1 \\ x_1 + 3x_2 = 2x_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2$$

επομένως ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή *2* είναι ο παρακάτω

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_2, x_2 \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Παρατηρούμε ότι $\dim V_2 = 1$ και συνεπώς η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 2 είναι 1. Η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 2 που είναι 1, δεν ταυτίζεται με την αλγεβρική της πολλαπλότητα που είναι 2. ■

9.1.14 Άσκηση αυτοαξιολόγησης

Προσπαθήστε να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των παρακάτω πινάκων :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} ; \; C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Σε κάθε περίπτωση να υπολογίσετε την αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα των ιδιοτιμών των πινάκων. Χρησιμοποιήστε το *Mathematica* για να επαληθεύσετε τα αποτελέσματα σας

Ασκήσεις 9.1.

1. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η οποία δίνεται από την σχέση
$$f\left(x_1, x_2\right) = \left(5x_1 - x_2, -x_1 + 5x_2\right)$$
Να υπολογιστούν τα ιδιοποσά της παραπάνω απεικόνισης.

2. Προσδιορίστε ποιο από τα διανύσματα
$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;;\; \mathrm{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;;\; \mathrm{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;;\; \mathrm{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
αποτελεί ιδιοδιάνυσμα του πίνακα
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$
και σε ποια ιδιοτιμή αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα αυτό.

3. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των παρακάτω πινάκων :
$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \;;\; A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \;;\; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \;;\; A_4 = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
Επίσης να δώσετε την αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής.

4. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των παρακάτω πινάκων :
$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \;;\; B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \;;\; B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;;\; B_4 = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
Επίσης να δώσετε την αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής.

Ενδεικτικές λύσεις των ασκήσεων

Απάντηση

1. Προσπαθούμε να λύσουμε την σχέση

$$f\left(x_1,x_2\right)=\left(5x_1-x_2,-x_1+5x_2\right)=\lambda\left(x_1,x_2\right)$$

ή ισοδύναμα την σχέση

$$\underbrace{\begin{pmatrix}5 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}}_{x}=\lambda\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}}_{x}$$

όπου A είναι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης. Η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{pmatrix}\lambda-5 & 1\\ 1 & \lambda-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

και έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν

$$\det\begin{pmatrix}\lambda-5 & 1\\ 1 & \lambda-5\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\lambda^2-10\lambda+24=0\Leftrightarrow\left(\lambda-4\right)\left(\lambda-6\right)=0\Leftrightarrow\lambda=4\vee\lambda=6$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές της γραμμικής απεικόνισης f είναι $\lambda=4\,\&\,\lambda=6$. Για $\lambda=4$ το παραπάνω σύστημα γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x_1=x_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\ x_2\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},x_2\in\mathbb{R}$$

Άρα το $\left(1,1\right)$ αποτελεί ένα ιδιοδιάνυσμα της γραμμικής απεικόνισης f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda=4$. Επίσης

$$V_4=\left\{\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}k,k\in\mathbb{R}\right\}$$

Για $\lambda=6$ το παραπάνω σύστημα γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x_2=-x_1\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ -x_1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},x_1\in\mathbb{R}$$

Άρα το $\left(1,-1\right)$ αποτελεί ένα ιδιοδιάνυσμα της γραμμικής απεικόνισης f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda=6$. Επίσης

$$V_6=\left\{\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}k,k\in\mathbb{R}\right\}$$

■

2. Τα x_1,x_4 είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή *λ=2*.

3.

$$A_1=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}\lambda_1=5\quad;\quad V_5=\left\langle\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}\right\rangle\\[2ex] \lambda_2=0\quad;\quad V_0=\left\langle\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle\end{array}\right.$$

Τα $\lambda_1=5,\lambda_2=0$ έχουν αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

$$A_2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix} \quad\to\quad \left\{\begin{array}{l}\lambda_1=3 \quad ; \quad V_3=\left\langle\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle\\ \\ \lambda_2=1 \quad ; \quad V_1=\left\langle\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle\end{array}\right\}$$

Τα $\lambda_1=3,\lambda_2=1$ έχουν αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

$$A_3=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix} \quad\to\quad \left\{\lambda_1=2 \quad ; \quad V_2=\left\langle\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle\right\}$$

Το $\lambda_1=2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

$$A_4=\begin{pmatrix}6 & 8\\ -1 & 2\end{pmatrix} \quad\to\quad \left\{\begin{array}{l}\lambda_1=4+2i \quad ; \quad V_3=\left\langle\begin{pmatrix}-2-2i\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle\\ \\ \lambda_2=4-2i \quad ; \quad V_1=\left\langle\begin{pmatrix}-2+2i\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle\end{array}\right\}$$

Τα $\lambda_1=4+2i,\lambda_2=4-2i$ έχουν αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

4.

$$B_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \quad\to\quad \left\{\begin{array}{l}\lambda_1=2 \quad ; \quad V_2=\left\langle\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle\\ \\ \lambda_2=0 \quad ; \quad V_0=\left\langle\begin{pmatrix}5\\ -4\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle\end{array}\right\}$$

Το $\lambda_1=2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και γεωμετρική πολλαπλότητα 1, ενώ το $\lambda_1=0$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 1 και γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 2+3i \quad ; \quad V_{2+3i} = \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}i \\ \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \lambda_2 = 2-3i \quad ; \quad V_{2-3i} = \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \lambda_3 = 2 \quad ; \quad V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{array} \right\}$$

Τα $\lambda_1 = 2+3i, \lambda_2 = 2-3i, \lambda_3 = 2$ έχουν αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \lambda_1 = 1 \quad ; \quad V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}$$

Το $\lambda_1 = 1$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 3 και γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

$$B_4 = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -4 \quad ; \quad V_{-4} = \left\langle \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \lambda_2 = 3 \quad ; \quad V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{array} \right\}$$

Το $\lambda_1 = -4$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 1 και γεωμετρική πολλαπλότητα 1, ενώ το $\lambda_2 = 3$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

9.2 Ιδιότητες

Στην ενότητα αυτή θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε μερικές από τις σημαντικές ιδιότητες των ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων τετράγωνων πινάκων.

9.2.1 Θεώρημα

Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *με ιδιοτιμή* $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *και το ιδιοδιάνυσμα* $x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ *που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Τότε :*

(α) *Ο πίνακας* A^k *θα έχει ως ιδιοτιμή το* $\lambda^k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), k = 2,3,...$ *και ιδιοδιάνυσμα το* $x \in \mathbb{C}^n$.

(β) *Ο πίνακας A δεν έχει πλήρη τάξη αν και μόνο αν το 0 αποτελεί ιδιοτιμή του πίνακα A.*

(γ) *Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος (συνεπώς* $\lambda \neq 0$*), ο πίνακας* A^{-1} *θα έχει ως ιδιοτιμή το* $\lambda^{-1} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *και ιδιοδιάνυσμα το* $x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$.

(δ) *Ο πίνακας* A^T *(ανάστροφος) θα έχει ως ιδιοτιμή το* $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *και αριστερό ιδιοδιάνυσμα το* $x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$.

(ε) *Έστω ο πίνακας* $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *με ιδιοτιμή* $\mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *και το ίδιο ιδιοδιάνυσμα* $x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ *με τον πίνακα A, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μ. Τότε ο πίνακας* $A+B$ *θα έχει ως ιδιοτιμή την* $\lambda+\mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το* $x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$.

(στ) *Έστω ο πίνακας* $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *με ιδιοτιμή* $\mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *και το ίδιο ιδιοδιάνυσμα* $x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ *με τον πίνακα A, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μ. Τότε ο πίνακας* AB *θα έχει ως ιδιοτιμή την* $\lambda\mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το* $x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$.

Απόδειξη

(α) Θα δώσουμε την απόδειξη του (α) με επαγωγή.

Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει ιδιοτιμή την $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ και ιδιοδιάνυσμα το $x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, τότε :

$$Ax = \lambda x \tag{9.2.1}$$

Πρώτα αποδεικνύουμε ότι το (α) ισχύει για *k=2*, θα έχουμε

$$A^2x = A(Ax) \overset{(9.2.1)}{=} A(\lambda x) = \lambda(Ax) \overset{(9.2.1)}{=} \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x$$

Έστω ότι το (α) ισχύει για *k=n*

$$A^n x = \lambda^n x \tag{9.2.2}$$

Θα δείξουμε ότι το (α) ισχύει για k=n+1

$$A^{n+1}x = A(A^n x) \overset{(9.2.2)}{=} A(\lambda^n x) = \lambda^n(Ax) \overset{(9.2.1)}{=} \lambda^n(\lambda x) = \lambda^{n+1}x$$

(β)

($\Rightarrow$) Αν ο πίνακας *A* δεν έχει πλήρη τάξη, τότε έχει έναν μη μηδενικό δεξιά μηδενικό χώρο, δηλαδή υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα *x* τέτοιο ώστε

$$Ax = 0$$

το οποίο μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως $Ax = 0x$, και συνεπώς το 0 αποτελεί ιδιοτιμή του πίνακα A.
($\Leftarrow$) Αν το 0 αποτελεί ιδιοτιμή του πίνακα A, θα έχουμε ότι

$$\det\left[0\times I_n - A\right] = \det\left[-A\right] = \left(-1\right)^n \det\left[A\right] = 0 \Rightarrow \det\left[A\right] = 0$$

και συνεπώς ο πίνακας A έχει τάξη μικρότερη από n.

(γ) Από την σχέση (9.2.1) έχουμε ότι

$$Ax = \lambda x \overset{\times A^{-1}}{\Rightarrow} A^{-1}Ax = A^{-1}\lambda x \Rightarrow x = A^{-1}\lambda x \tag{9.2.3}$$

Από το 9.2.1β με αντιθετοαντιστροφή[3] έχουμε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν έχει μη μηδενικές ιδιοτιμές και συνεπώς μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την σχέση (9.2.3) με λ^{-1} και να πάρουμε

$$A^{-1}x = \lambda^{-1}x$$

το οποίο αποδεικνύει το 9.2.1γ.

(δ) Οι πίνακες A, A^T έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο όπως φαίνεται παρακάτω και συνεπώς θα έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές

$$\det\left[\lambda I_n - A\right] = \det\left[\left(\lambda I_n - A\right)^T\right] = \det\left[\lambda I_n^T - A^T\right] = \det\left[\lambda I_n - A^T\right]$$

Από την παρακάτω σχέση μπορούμε επίσης να συμπεράνουμε ότι το διάνυσμα x^T αποτελεί αριστερό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

$$Ax = \lambda x \Rightarrow \left(Ax\right)^T = \left(\lambda x\right)^T \Rightarrow x^T A^T = \lambda x^T$$

(ε) Εύκολα φαίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\left(A+B\right)x = Ax + Bx = \lambda x + \mu x = \left(\lambda + \mu\right)x$$

(στ) Αποδείξτε το με τον ίδιο τρόπο που αποδείχθηκε το (ε). ■

Μπορούμε να αποδείξουμε από τον συνδυασμό των σχέσεων (α), (γ) στο θεώρημα 9.2.1 ότι η σχέση (α) ισχύει για κάθε ακέραιο αριθμό και όχι μόνο για θετικούς ακέραιους αριθμούς.

9.2.2 Παράδειγμα

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$p\left(\lambda\right) = \lambda\left(\lambda - 5\right)$$

και συνεπώς έχει ως ιδιοτιμές τις {0,5}. Επειδή μια από τις ιδιοτιμές είναι το 0, συμπεραίνουμε βάση του Θεωρήματος 9.2.1β, ότι ο πίνακας δεν έχει πλήρη τάξη. Θεωρείστε τον πίνακα

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}$$

Ο παραπάνω πίνακας έχει ως χαρακτηριστικό πολυώνυμο το

---

[3] Αν η πρόταση p συνεπάγεται την πρόταση q, τότε η αντίθετη της πρότασης q θα συνεπάγεται την αντίθετη της πρότασης p.

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 25)$$

και συνεπώς έχει (Θεώρημα 9.2.1α) ως ιδιοτιμές τις $\{0^2 = 0, 5^2 = 25\}$.

Έστω ο πίνακας

$$A + A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 18 & 18 \end{pmatrix}$$

Από το Θεώρημα 9.2.1α αν ο πίνακας A έχει ως ιδιοτιμή το λ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το x, τότε ο πίνακας A^2 θα έχει ως ιδιοτιμή το λ^2 και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το x. Συνεπώς βάσει του Θεωρήματος 9.2.1.ε ο πίνακας $A + A^2$ θα έχει ως ιδιοτιμή την $\lambda + \lambda^2$, δηλαδή $\{0 + 0^2 = 0, 5 + 5^2 = 30\}$, όπως άλλωστε φαίνεται από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα αυτού

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 30)$$

■

9.2.3 Παράδειγμα

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Εφόσον υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του παραπάνω πίνακα, να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A^2 - 2A + I_2$$

Απάντηση

Ο πίνακας *A* έχει το ακόλουθο χαρακτηριστικό πολυώνυμο :

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1)$$

και συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα *A* είναι 5 και -1. Αν x είναι το ιδιοδιάνυσμα του πίνακα *A* για την ιδιοτιμή *λ*, τότε θα έχουμε :

$$(A^2 - 2A + I_2)x = A^2x - 2(Ax) + x = \lambda^2 x - 2\lambda x + x = (\lambda^2 - 2\lambda + 1)x$$

Συνεπώς ο πίνακας $A^2 - 2A + I_2$ θα έχει ως ιδιοτιμή το $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ και ιδιοδιάνυσμα το *x*, δηλαδή οι ιδιοτιμές του θα είναι $\{(-1)^2 - 2(-1) + 1 = 4, 5^2 - 2 \times 5 + 1 = 16\}$. ■

9.2.4 Θεώρημα

Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *με ιδιοτιμές* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. *Τότε :*

$$\det[A] = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$trace[A] = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

όπου με τον όρο trace εννοούμε το ***ίχνος*** *του πίνακα, δηλαδή το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του πίνακα A πρδ.* $a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}$.

Απόδειξη.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα θα είναι

$$p(\lambda) = \det[\lambda I_n - A] = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

και συνεπώς για $\lambda = 0$ θα έχουμε

$$p(0) = \det[0I_n - A] = \det[-A] = (0 - \lambda_1)(0 - \lambda_2)\cdots(0 - \lambda_n) = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

Επειδή όμως $\det[-A]=(-1)^n\det[A]$ θα έχουμε

$$(-1)^n\det[A]=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \Rightarrow \det[A]=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

Όσον αφορά την απόδειξη της δεύτερης σχέσης, παρατηρήστε ότι ο συντελεστής του λ^{n-1} στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_n$ (από το γινόμενο των μεγιστοβάθμιων συντελεστών των n-1 παραγόντων με την σταθερά του εναπομείναντα παράγοντα). Στη συνέχεια υπολογίστε τον συντελεστή του λ^{n-1} στην ορίζουσα :

$$p(\lambda)=\det[\lambda I_n-A]=\begin{vmatrix} \lambda-a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \lambda-a_{2,2} & \cdots & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \cdots & \lambda-a_{n,n} \end{vmatrix}$$

κάνοντας χρήση του κανόνα της σελ.27 (στον πρώτο τόμο)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \lambda-a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} & \lambda-a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n-1} \\ -a_{2,1} & \lambda-a_{2,2} & \cdots & -a_{2,n} & -a_{2,1} & \lambda-a_{2,2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \lambda-a_{n-1,n-1} \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \cdots & \lambda-a_{n,n} & -a_{n,1} & -a_{n,2} & \cdots & -a_{n,n-1} \end{array}\right.$$

Θα διαπιστώσετε ότι μόνο η κύρια διαγώνιος μας δίνει συντελεστή του λ^{n-1} (καθώς και $\lambda^{n-2},...,\lambda^2$) ίσο με $-a_{1,1}-a_{2,2}-\cdots-a_{n,n}=-trace[A]$. Άρα $-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_n=-trace[A]$ που αποδεικνύει την δεύτερη σχέση. ■

Οι σχέσεις που διατυπώθηκαν στο παραπάνω θεώρημα αποτελούν και έναν χρήσιμο κανόνα για να ελέγξουμε αν οι ιδιοτιμές που υπολογίσαμε για έναν τετράγωνο πίνακα είναι σωστές.

9.2.5 Παράδειγμα

Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

του παραδείγματος 9.1.11, ο οποίος αποδείχτηκε ότι έχει ιδιοτιμές τις 2 και 8 με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και 1 αντίστοιχα. Παρατηρήστε ότι

$$\det[A]=32=\underbrace{2}_{\lambda_1}\times\underbrace{2}_{\lambda_2}\times\underbrace{8}_{\lambda_3}$$

καθώς και

$$trace[A]=4+4+4=12=\underbrace{2}_{\lambda_1}+\underbrace{2}_{\lambda_2}+\underbrace{8}_{\lambda_3}$$ ■

9.2.6 Άσκηση αυτοαξιολόγησης

Έστω ο πίνακας A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 9.2.4 και χωρίς να υπολογίσετε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, υπολογίστε τις ιδιοτιμές του πίνακα A. ■

Στο κεφάλαιο 10 θα περιγράψουμε τις ιδιότητες των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων από ειδικές κατηγορίες πινάκων, όπως οι συμμετρικοί πίνακες, ερμητιανοί πίνακες, ορθομοναδιαίοι πίνακες και οι πίνακες Markov.

Ασκήσεις 9.2

1. Έστω $q(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ και για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορίστε τον πολυωνυμικό πίνακα $q(A) = A^2 - 2A + I_{n,n}$ όπου $I_{n,n}$ ο (nxn) μοναδιαίος πίνακας.
   (α) Να αποδείξετε ότι αν λ είναι η ιδιοτιμή του πίνακα A, τότε ο αριθμός $q(\lambda)$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $q(A)$.
   (β) Να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα που βρήκατε παραπάνω για να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του πίνακα $q(B_1)$ όπου B_1 είναι ο πίνακας που δόθηκε στην άσκηση 3 του κεφαλαίου 9.1.

2. Ένας (nxn) πίνακας A ονομάζεται *idempotent* εάν $A^2 = A$. Να δείξετε ότι οι μόνες ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda=0$ και $\lambda=1$.

3. Να δείξετε ότι τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα και τα ίχνη δύο όμοιων πινάκων συμπίπτουν.

4. Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, να δείξετε ότι οι πίνακες AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Ενδεικτικές λύσεις των ασκήσεων

1. (α) Υποθέστε ότι $Ax = \lambda x$, όπου $x \neq 0$ και κάντε χρήση του Θεωρήματος 9.2.1α.

   (β) Ο πίνακας B_1 είχε ως ιδιοτιμές το $\lambda_1 = 2$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και γεωμετρική πολλαπλότητα 1, και το $\lambda_1 = 0$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 1 και γεωμετρική πολλαπλότητα 1. Συνεπώς ο πίνακας $q(B_1)$ θα έχει ως ιδιοτιμές τις $q(\lambda_1) = q(2) = 2^2 - 2\times 2 + 1 = 1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και γεωμετρική πολλαπλότητα 1, και το $q(\lambda_1) = q(0) = 0^2 - 2\times 0 + 1 = 1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 1 και γεωμετρική πολλαπλότητα 1. ■

2. Έστω ότι $Ax = \lambda x$, όπου $x \neq 0$. Τότε $A^2 x \overset{A^2=A}{=} Ax = \lambda x$. Επίσης έχουμε ότι $A^2 x = A(Ax) \overset{Ax=\lambda x}{=} A\lambda x = \lambda(Ax) \overset{Ax=\lambda x}{=} \lambda^2 x$. Συνδυάζοντας τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε ότι
$$\lambda^2 x = \lambda x \Rightarrow (\lambda^2 - \lambda)x = 0 \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 1 \quad ■$$

3. Έστω δύο όμοιοι πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $B = T^{-1}AT$ και συνεπώς
$$\det\left[\lambda I_{n,n} - B\right] = \det\left[\lambda I_{n,n} - T^{-1}AT\right] \overset{T^{-1}T=I_{n,n}}{=} \det\left[\lambda T^{-1}T - T^{-1}AT\right] =$$
$$= \det\left[T^{-1}(\lambda I_{n,n} - A)T\right] = \det\left[T^{-1}\right]\det\left[(\lambda I_{n,n} - A)\right]\det\left[T\right] \overset{\det[T^{-1}]=\det[T]^{-1}}{=}$$
$$= \det\left[T\right]^{-1}\det\left[(\lambda I_{n,n} - A)\right]\det\left[T\right] = \det\left[(\lambda I_{n,n} - A)\right]$$
   Άρα οι δύο πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.
   Επίσης γνωρίζουμε από το Θεώρημα 9.2.4 ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ γράφεται ως
$$\det\left[\lambda I_{n,n} - A\right] = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} ίχνος(A)\lambda^{n-1} + \cdots + \det\left[A\right]$$
   Αν λοιπόν
$$\det\left[\lambda I_{n,n} - B\right] = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} ίχνος(B)\lambda^{n-1} + \cdots + \det\left[B\right]$$
   τότε επειδή οι δύο πίνακες έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά πολυώνυμα, οι συντελεστές των δύο παραπάνω πολυωνύμων θα συμπίπτουν με αποτέλεσμα τα ίχνη των δύο πινάκων ως συντελεστές του λ^{n-1} να είναι ίδιοι. Επίσης παρατηρούμε ότι και οι ορίζουσες των δύο πινάκων είναι ίδιες ως σταθεροί όροι των χαρακτηριστικών πολυωνύμων. ■

4. Έστω λ η ιδιοτιμή του πίνακα AB δηλ. $ABx = \lambda x, x \neq 0$.
   <u>Περίπτωση 1.</u> λ=0. Τότε από Θεώρημα 9.2.1β
$$0 = \det\left[AB\right] = \det\left[A\right]\det\left[B\right] = \det\left[B\right]\det\left[A\right] = \det\left[BA\right]$$
   και συνεπώς λ=0 είναι και η ιδιοτιμή του πίνακα BA.
   <u>Περίπτωση 2.</u> $\lambda \neq 0$. Τότε

$$ABx = \lambda x \overset{\times B}{\Rightarrow} B\left(ABx\right) = B\left(\lambda x\right) \Rightarrow BA\left(Bx\right) = \lambda\left(Bx\right)$$

Το $Bx \neq 0$, διαφορετικά $Bx = 0 \overset{\times A}{\Rightarrow} ABx = 0 \overset{ABx=\lambda x}{\Rightarrow} \lambda x = 0 \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} \lambda = 0$ (άτοπο), και συνεπώς το λ αποτελεί ιδιοτιμή του πίνακα BA. ■

9.3 Θεώρημα Cayley-Hamilton

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και το πολυώνυμο :

$$p(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + \cdots + p_k\lambda^k$$

Καλούμε τιμή του $p(\lambda)$ στον A τον πίνακα

$$p(A) := p_0 I_n + p_1 A + \cdots + p_k A^k$$

Παρατηρήστε ότι την σταθερά p_0 του πολυωνύμου την πολλαπλασιάζουμε με τον μοναδιαίο πίνακα, ενώ στην θέση του s στο πολυώνυμο τοποθετούμε τον πίνακα A. Λέμε ότι το πολυώνυμο $p(\lambda)$ μηδενίζεται από τον πίνακα A αν

$$p(A) = 0_{n,n}$$

Ο χώρος των πινάκων διαστάσεως nxn είναι διανυσματικός χώρος με διάσταση n^2 και συνεπώς οποιαδήποτε n^2+1 διανύσματα του χώρου αυτού είναι γραμμικώς εξηρτημένα. Βάσει του σκεπτικού αυτού οι πίνακες $\left\{I_n, A, A^2, ..., A^{n^2}\right\}$ είναι γραμμικώς εξηρτημένοι και συνεπώς υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n^2}$ τέτοιοι ώστε

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \cdots + \lambda_{n^2} A^{n^2} = 0_{n,n}$$

Άρα για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ υπάρχει ένα πολυώνυμο βαθμού n^2 το οποίο μηδενίζεται από τον πίνακα αυτό.

9.3.1 Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε οι $n^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$ πίνακες

$$I_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{pmatrix}$$

είναι γραμμικώς εξηρτημένοι και συνεπώς υπάρχουν σταθερές $\lambda_i, i = 0,1,..,4$ τέτοιες ώστε

$$\lambda_0 I_{2,2} + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \lambda_3 A^3 + \lambda_4 A^4 = 0_{2,2}$$

Λύνοντας την παραπάνω σχέση, υπολογίζουμε τις σταθερές $\lambda_i, i = 0,1,..,4$ (προσπαθήστε να λύσετε το παραπάνω σύστημα που προκύπτει)

$$\lambda_0 = -3\lambda_2 - 6\lambda_3 - 21\lambda_4, \lambda_1 = -2\lambda_2 - 7\lambda_3 - 20\lambda_4$$

Συνεπώς $\lambda_0 = -3, \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ αποτελεί μια από τις λύσεις του παραπάνω συστήματος και άρα το πολυώνυμο $p(\lambda) = -3 - 2\lambda + \lambda^2$ είναι τέτοιο ώστε $p(A) = 0_{2,2}$. ■

Θα διαπιστώσατε από το παραπάνω παράδειγμα ότι η μέθοδος που ακολουθήσαμε για την εύρεση του πολυωνύμου $p(\lambda)$ ήταν αρκετά επίπονη. Στο παρακάτω θεώρημα προτείνουμε έναν πιο εύκολο τρόπο υπολογισμού του πολυωνύμου αυτού.

9.3.2 Θεώρημα (Cayley-Hamilton)

Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *μηδενίζει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο* $p(\lambda) = \det[\lambda I_n - A]$ *δηλ.* $p(A) = 0_{n,n}$.

Απόδειξη

Έστω

$$p(\lambda) = \det[\lambda I_n - A] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

και

$$[\lambda I_n - A]^{-1} = \frac{Adj[\lambda I_n - A]}{\det[\lambda I_n - A]}$$

όπου

$$Adj[\lambda I_n - A] = b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + b_1\lambda + b_0$$

Αν εξισώσουμε τους συντελεστές του λ στην παρακάτω σχέση

$$I_n = [\lambda I_n - A] \times [\lambda I_n - A]^{-1} = [\lambda I_n - A] \times \frac{Adj[\lambda I_n - A]}{\det[\lambda I_n - A]} \Leftrightarrow$$

$$\det[\lambda I_n - A] \times I_n = [\lambda I_n - A] \times Adj[\lambda I_n - A] \Leftrightarrow$$

$$\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right) \times I_n = \left(\lambda I_n - A\right) \times \left(b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + b_1\lambda + b_0\right)$$

θα πάρουμε

$$\begin{aligned}
a_0 I_n &= -Ab_0 \\
a_1 I_n &= -Ab_1 + b_0 \\
&\ldots\ldots \\
a_{n-1} I_n &= -Ab_{n-1} + b_{n-2} \\
I_n &= b_{n-1}
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις με $I, A, A^2, ..., A^n$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
a_0 I_n &= -Ab_0 \\
a_1 A &= -A^2 b_1 + Ab_0 \\
&\ldots\ldots \\
a_{n-1} A^{n-1} &= -A^n b_{n-1} + A^{n-1} b_{n-2} \\
A^n &= b_{n-1} A^n
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω εξισώσεις θα έχουμε

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n =$$

$$= A^n b_{n-1} + \left(-A^n b_{n-1} + A^{n-1} b_{n-2}\right) + \cdots + \left(-A^2 b_1 + Ab_0\right) + \left(-Ab_0\right) = 0$$

■

9.3.3 Παράδειγμα

Θεωρείστε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ο οποίος, ως άνω τριγωνικός, είναι εύκολο να δειχθεί ότι έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο :

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8$$

και συνεπώς σύμφωνα με το Θεώρημα Cayley-Hamilton θα έχουμε

$$p(A) = A^3 - 6A^2 + 12A - 8I_3 = 0_{3,3}$$

Προσπάθησε να κάνεις την επαλήθευση. Μπορούμε όμως να ελέγξουμε ότι το πολυώνυμο :

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

μηδενίζεται επίσης από τον πίνακα A. Συνεπώς το πολυώνυμο που υπολογίζουμε από το Θεώρημα Cayley-Hamilton ή ισοδύναμα από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα, δεν είναι το ελαχίστου βαθμού πολυώνυμο που μηδενίζεται από τον πίνακα A. ■

9.3.1 Εφαρμογές του Θεωρήματος Cayley-Hamilton

9.3.1.1 Εύρεση αντίστροφου πίνακα

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο :

$$p(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + \cdots + p_n\lambda^n$$

Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα Cayley-Hamilton θα έχουμε :

$$p(A) = p_0 I_n + p_1 A + \cdots + p_n A^n = 0_{n,n}$$

Στην περίπτωση που ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος θα έχουμε $p_0 \neq 0$ ($p_0 = p(0) = \det[0 \times I_n - A] = \det[-A] = (-1)^n \det[A] \neq 0$) και συνεπώς :

$$p_0 I_n = -p_1 A - \cdots - p_n A^n = A\left(-p_1 I_n - p_2 A - \cdots - p_n A^{n-1}\right) \xRightarrow{\times\frac{1}{p_0}}$$

$$I_n = A\left\{\frac{1}{p_0}\left(-p_1 I_n - p_2 A - \cdots - p_n A^{n-1}\right)\right\} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{p_0}\left(-p_1 I_n - p_2 A - \cdots - p_n A^{n-1}\right)$$

9.3.1.1 Παράδειγμα

Θεωρείστε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

που έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8$$

και συνεπώς από το Θεώρημα Cayley-Hamilton θα έχουμε

$$p(A) = A^3 - 6A^2 + 12A - 8I_3 = 0_{3,3}$$

ή ισοδύναμα

$$A\left(A^2-6A+12I_3\right)=8I_3 \Rightarrow A\left\{\frac{1}{8}\left(A^2-6A+12I_3\right)\right\}=I_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{8}\left(A^2-6A+12I_3\right)=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

■

9.3.1.2 Υπολογισμός τιμών ενός πολυωνύμου σε πίνακα.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή του πολυωνύμου :

$$q(\lambda)=q_0+q_1\lambda+\cdots+q_k\lambda^k$$

σε έναν πίνακα $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο :

$$p(\lambda)=p_0+p_1\lambda+\cdots+p_n\lambda^n$$

Στην περίπτωση που ο βαθμός του πολυωνύμου $q(\lambda)$ είναι μικρότερος από τον βαθμό του $p(\lambda)$ υπολογίζουμε τον πίνακα $q(A)$ με απλή αντικατάσταση. Στην περίπτωση που ο βαθμός του πολυωνύμου $q(\lambda)$ είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του $p(\lambda)$ τότε κάνουμε την ευκλείδια διαίρεση του $p(\lambda)$ με το $q(\lambda)$. Δηλαδή υπάρχουν πολυώνυμα $a(\lambda)$ και $r(\lambda)$ με $\deg r(\lambda)\le\deg p(\lambda)$ τέτοια ώστε :

$$q(\lambda)=a(\lambda)p(\lambda)+r(\lambda)$$

και συνεπώς με αντικατάσταση του s με τον πίνακα A θα έχουμε

$$q(A)=a(A)p(A)+r(A)=r(A)$$

Αυτό δηλαδή που μπορούμε να καταφέρουμε είναι να μειώσουμε τον βαθμό υπολογισμού του πολυωνυμικού πίνακα από k σε έναν βαθμό μικρότερο του n. Ένα δεύτερο ερώτημα που γεννιέται είναι πως θα υπολογίσουμε το υπόλοιπο $r(\lambda)$. Ένας τρόπος είναι με την απευθείας διαίρεση πολυωνύμων. Ο τρόπος αυτός είναι πολύ πολύπλοκος όταν ο βαθμός k του $q(\lambda)$ είναι πολύ μεγαλύτερος από τον βαθμό n του $p(\lambda)$. Θα δούμε παρακάτω έναν δεύτερο τρόπο υπολογισμού του πολυωνύμου r(λ).

1η περίπτωση. Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας A έχει τις ιδιοτιμές $\lambda_i, i=1,2,...,n$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 1. Τότε θα έχουμε

$$q(\lambda_i)=a(\lambda_i)p(\lambda_i)+r(\lambda_i)=r(\lambda_i)$$

$$i=1,2,...,n$$

διότι $p(\lambda_i)=\det\left[\lambda_i I_n-A\right]=0$. Αν υποθέσουμε ότι :

$$r(\lambda)=r_0+r_1\lambda+\cdots+r_{n-1}\lambda^{n-1}$$

Θα πρέπει λοιπόν να λύσουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων :

$$q(\lambda_i)=r_0+r_1\lambda_i+\cdots+r_{n-1}\lambda_i^{n-1}$$

$$i=1,2,...,n$$

9.3.1.2.1 Παράδειγμα

Προσπαθήστε να υπολογίσετε την παράσταση :

$$A^{2004}-A^{2003}+A^{2002}$$

όπου

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

Απάντηση

Έχουμε λοιπόν ότι

$$q(\lambda)=\lambda^{2004}-\lambda^{2003}+\lambda^{2002}$$

και

$$p(\lambda)=\det\begin{bmatrix}\lambda-3 & -1\\ 1 & \lambda-3\end{bmatrix}=\lambda^2-6\lambda+8=(\lambda-2)(\lambda-4)$$

Ψάχνουμε λοιπόν για το υπόλοιπο $r(\lambda)=r_0+r_1\lambda$ της διαίρεσης του $q(\lambda)$ με το $p(\lambda)$. Σύμφωνα με την παραπάνω θεωρία θα πρέπει το υπόλοιπο $r(\lambda)$ και το πολυώνυμο $q(\lambda)$ να έχουν τις ίδιες τιμές για τις ιδιοτιμές του πίνακα A δηλ.

$$q(2)=2^{2004}-2^{2003}+2^{2002}=r_0+2r_1=r(2)$$

$$q(4)=4^{2004}-4^{2003}+4^{2002}=r_0+4r_1=r(4)$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα πάρουμε :

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_0\\ r_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{2002}(4-2+1)\\ 4^{2002}(16-4+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times 2^{2002}\\ 13\times 2^{4004}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}r_0\\ r_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\times 2^{2002}\\ 13\times 2^{4004}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\times 2^{2002}\\ 13\times 2^{4004}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}r_0\\ r_1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}12\times 2^{2002}-26\times 2^{4004}\\ -3\times 2^{2002}+13\times 2^{4004}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\times 2^{2002}-13\times 2^{4004}\\ -3\times 2^{2001}+13\times 2^{4003}\end{pmatrix}$$

και συνεπώς η τιμή που ψάχνουμε θα είναι

$$q(A)=r(A)=\left(6\times 2^{2002}-13\times 2^{4004}\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(-3\times 2^{2001}+13\times 2^{4003}\right)\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}2^{2002}+\frac{13}{4}2^{4004} & -3\times 2^{2001}+13\times 2^{4003}\\ 3\times 2^{2001}-13\times 2^{4003} & \frac{3}{2}2^{2002}+\frac{13}{4}2^{4004}\end{bmatrix}$$

■

9.3.1.2.2 Άσκηση αυτοαξιολόγησης

Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 6\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

Να υπολογίσετε τον πίνακα A^{20}. ■

2η περίπτωση. Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας Α έχει την ιδιοτιμή λ_i με αλγεβρική πολλαπλότητα v. Τότε θα έχουμε

$$q(\lambda)=a(\lambda)\,p(\lambda)+r(\lambda)$$

όπου $p(\lambda)=\det[\lambda I_n-A]=(\lambda-\lambda_i)^{v}\,\tilde{p}(\lambda)$ και συνεπώς θα έχουμε ισοδύναμα :

$$q(\lambda)=a(\lambda)(\lambda-\lambda_i)^{\nu}\,\tilde{p}(\lambda)+r(\lambda)\Rightarrow q(\lambda_i)=a(\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_i)^{\nu}\,\tilde{p}(\lambda_i)+r(\lambda_i)\Rightarrow q(\lambda_i)=r(\lambda_i)$$

$$q'(\lambda)=a'(\lambda)(\lambda-\lambda_i)^{\nu}\,\tilde{p}(\lambda)+a(\lambda)\nu(\lambda-\lambda_i)^{\nu-1}\,\tilde{p}(\lambda)+a(\lambda)(\lambda-\lambda_i)^{\nu}\,\tilde{p}'(\lambda)+r'(\lambda)\Rightarrow$$
$$q'(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{\nu-1}\,a_1(\lambda)+r'(\lambda)\Rightarrow q'(\lambda_i)=r'(\lambda_i)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$q^{(n-1)}(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)a_{n-1}(\lambda)+r^{(n-1)}(\lambda)\Rightarrow q^{(n-1)}(\lambda_i)=r^{(n-1)}(\lambda_i)$$

Συνεπώς θα πρέπει για κάθε ιδιοτιμή λ_i με αλγεβρική πολλαπλότητα ν να λύσουμε τις εξισώσεις :

$$q(\lambda_i)=r(\lambda_i)$$
$$q'(\lambda_i)=r'(\lambda_i)$$
$$\ldots\ldots$$
$$q^{(n-1)}(\lambda_i)=r^{(n-1)}(\lambda_i)$$

υποθέτοντας ότι :

$$r(\lambda)=r_0+r_1\lambda+\cdots+r_{n-1}\lambda^{n-1}$$

9.3.1.2.3 Παράδειγμα

Προσπαθήστε να υπολογίσετε την παράσταση :

$$A^{2004}-A^{2003}+A^{2002}$$

όπου

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

Απάντηση. Έχουμε λοιπόν ότι

$$q(\lambda)=\lambda^{2004}-\lambda^{2003}+\lambda^{2002}$$

και

$$p(\lambda)=\det\begin{bmatrix}\lambda-3 & -1\\ 0 & \lambda-3\end{bmatrix}=\lambda^2-6\lambda+9=(\lambda-3)^2$$

Ψάχνουμε λοιπόν για το υπόλοιπο $r(\lambda)=r_0+r_1\lambda$ της διαίρεσης του $q(\lambda)$ με το $p(\lambda)$. Σύμφωνα με την παραπάνω θεωρία θα πρέπει το υπόλοιπο $r(\lambda)$ και το πολυώνυμο $q(\lambda)$, αλλά και οι παράγωγοι τους, να έχουν τις ίδιες τιμές για την ιδιοτιμή 3 του πίνακα A δηλ.

$$q(3)=3^{2004}-3^{2003}+3^{2002}=r_0+3r_1=r(3)$$
$$q'(3)=2004\times3^{2003}-2003\times3^{2002}+2002\times3^{2001}=r_1=r'(3)$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα πάρουμε :

$$r_0=-6009\times3^{2003}+6006\times3^{2002}-6003\times3^{2001}$$
$$r_1=2004\times3^{2003}-2003\times3^{2002}+2002\times3^{2001}$$

και συνεπώς η τιμή που ψάχνουμε θα είναι

$$q(A)=r(A)=\left(-6009\times 3^{2003}+6006\times 3^{2002}-6003\times 3^{2001}\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+$$
$$+\left(2004\times 3^{2003}-2003\times 3^{2002}+2002\times 3^{2001}\right)\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}3^{2004}-3^{2003}+3^{2002} & 2004\times 3^{2003}-2003\times 3^{2002}+2002\times 3^{2001}\\ 0 & 3^{2004}-3^{2003}+3^{2002}\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}\left(3^2-3^1+1\right)3^{2002} & \left(2004\times 3^2-2003\times 3^1+2002\right)3^{2001}\\ 0 & \left(3^2-3^1+1\right)3^{2002}\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}7\times 3^{2002} & 14029\times 3^{2001}\\ 0 & 7\times 3^{2002}\end{bmatrix}$$

MATHEMATICA 5

Ορισμός του πίνακα A

```
In[1]:= a = {{3, 1}, {0, 3}}
```

Out[1]= $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

Υπολογισμός του αθροίσματος $A^{2004}-A^{2003}+A^{2002}$ κάνοντας χρήση της συνάρτησης MatrixPower[πίνακας, δύναμη] που υπολογίζει την «δύναμη» ενός «πίνακα» καθώς και της συνάρτησης FactorInteger[ακέραιος] που παραγοντοποιεί έναν «ακέραιο» αριθμό.

```
In[2]:= MatrixPower[a, 2004] - MatrixPower[a, 2003] + MatrixPower[a, 2002] // FactorInteger
```

Out[2]= $\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2002\\ 7 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3 & 2001\\ 14029 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3 & 2002\\ 7 & 1\end{pmatrix}\end{pmatrix}$

Άρα το αποτέλεσμα που θα πάρουμε είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix}7^1\times 3^{2002} & 14029^1\times 3^{2001}\\ 0^1 & 7^1\times 3^{2002}\end{pmatrix}$$

το οποίο και συμφωνεί με το αποτέλεσμα που υπολογίσαμε. ■

9.3.1.2.4 Άσκηση αυτοαξιολόγησης

Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

Να υπολογίσετε τον πίνακα A^6. ■

Η παραπάνω μεθοδολογία μπορεί να εφαρμοστεί και σε οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση $q(\lambda)$, μη πολυωνυμική, η οποία έχει ανάπτυγμα Taylor το οποίο συγκλίνει σε μια περιοχή $|\lambda|<R$ και όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A έχουν την ιδιότητα απολύτως να ανήκουν στην περιοχή αυτή.

9.3.1.2.5 Παράδειγμα

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

να υπολογιστεί ο πίνακας e^A.

Απάντηση

Η συνάρτηση

$$q(\lambda) = e^{\lambda}$$

συγκλίνει σε όλο τον πραγματικό άξονα και συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε την μεθοδολογία που έχουμε αναπτύξει παραπάνω. Ο πίνακας A έχει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο :

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -8 \\ 2 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$$

Ψάχνουμε λοιπόν για ένα πολυώνυμο $r(\lambda) = r_0 + r_1\lambda$ το οποίο θα έχει τις ίδιες τιμές με το $q(\lambda)$ στις ιδιοτιμές του πίνακα A δηλ.

$$q(3) = e^3 = r_0 + 3r_1 = r(3)$$

$$q(-3) = e^{-3} = r_0 - 3r_1 = r(-3)$$

λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα έχουμε :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^3 \\ e^{-3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e^3 \\ e^{-3} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^3 \\ e^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(e^3 + e^{-3}\right) \\ \frac{1}{6}\left(e^3 - e^{-3}\right) \end{pmatrix}$$

και συνεπώς η τιμή που ψάχνουμε θα είναι

$$q(A) = r(A) = \frac{1}{2}\left(e^3 + e^{-3}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\left(e^3 - e^{-3}\right)\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{8}{6}e^3 - \frac{2}{6}e^{-3} & \frac{8}{6}\left(e^3 - e^{-3}\right) \\ -\frac{2}{6}\left(e^3 - e^{-3}\right) & -\frac{2}{6}e^3 + \frac{8}{6}e^{-3} \end{bmatrix}$$

Ορισμός του πίνακα A

```
In[1]:= a = {{5, 8}, {-2, -5}}
```

Out[1]= $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

Υπολογισμός του πίνακα e^A

```
In[2]:= MatrixExp[a]
```

Out[2]= $\begin{pmatrix} \frac{-1+4e^6}{3e^3} & \frac{4(-1+e^6)}{3e^3} \\ \frac{1-e^6}{3e^3} & \frac{4-e^6}{3e^3} \end{pmatrix}$

Σημείωση. Ο πίνακας e^A ορίζεται σύμφωνα με το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης e^x :

$$e^A = I_n + \frac{1}{1!}A^1 + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots$$

■

9.3.1.2.6 Άσκηση αυτοαξιολόγησης

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Να υπολογίσετε τον πίνακα $\sin(A)$.

Σημείωση. Ο πίνακας $\sin(A)$ ορίζεται σύμφωνα με το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $\sin(x)$:

$$\sin(A) = A - \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}A^{2k+1} + \cdots$$

■

Ασκήσεις 9.3

1. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Εφόσον υπολογίσετε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του παραπάνω πίνακα, να επαληθεύσετε το Θεώρημα Cayley-Hamilton.

2. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Να υπολογίσετε με την βοήθεια του Θεωρήματος Cayley-Hamilton την ν-οστή δύναμη του πίνακα A.

3. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(α) Να υπολογίσετε με την βοήθεια του Θεωρήματος Cayley-Hamilton τον αντίστροφο του πίνακα A.

(β) Να υπολογίσετε τον πίνακα A^{-2} ως συνάρτηση του πίνακα A.

Ενδεικτικές λύσεις των ασκήσεων.

1. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$p(\lambda)=\det\left[\lambda I_{2,2}-A\right]=\det\begin{bmatrix}\lambda-a & -b\\ -c & \lambda-d\end{bmatrix}=\lambda^2-\underbrace{(a+d)}_{\text{ίχνος}(\mathrm{A})}\lambda+\underbrace{(ad-bc)}_{\det[A]}$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$p(A)=A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_{2,2}=$$

$$=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^2-(a+d)\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}ad-bc & 0\\ 0 & ad-bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\qquad\blacksquare$$

2. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$p(\lambda)=\det\left[\lambda I_{2,2}-A\right]=\det\begin{pmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{pmatrix}=\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda-3)(\lambda+1)$$

Ψάχνουμε λοιπόν για το υπόλοιπο $r(\lambda)=r_0+r_1\lambda$ της διαίρεσης του $q(\lambda)=\lambda^n$ με το $p(\lambda)$. Σύμφωνα με την παραπάνω θεωρία θα πρέπει το υπόλοιπο $r(\lambda)$ και το πολυώνυμο $q(\lambda)$ να έχουν τις ίδιες τιμές για τις ιδιοτιμές του πίνακα A δηλ.

$$q(3)=3^n=r_0+3r_1=r(3)$$

$$q(-1)=(-1)^n=r_0-r_1=r(-1)$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα πάρουμε :

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_0\\ r_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^n\\ (-1)^n\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}r_0\\ r_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3^n\\ (-1)^n\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n\\ (-1)^n\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}r_0\\ r_1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3^n+3(-1)^n\\ 3^n-(-1)^n\end{pmatrix}$$

και συνεπώς η τιμή που ψάχνουμε θα είναι

$$q(A)=r(A)=\frac{1}{4}\left(3^n+3(-1)^n\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\frac{1}{4}\left(3^n-(-1)^n\right)\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\left(3^n+(-1)^n\right) & \frac{1}{2}\left(3^n-(-1)^n\right)\\ \frac{1}{2}\left(3^n-(-1)^n\right) & \frac{1}{2}\left(3^n+(-1)^n\right)\end{bmatrix}$$

Θα μπορούσε να λυθεί και στο Mathematica όπως παρακάτω :

```
In[1]:= MatrixPower[{{1, 2}, {2, 1}}, n]
```

Out[1]=

$$\begin{pmatrix}\frac{(-1)^n}{2}+\frac{3^n}{2} & -\frac{1}{2}(-1)^n+\frac{3^n}{2}\\ -\frac{1}{2}(-1)^n+\frac{3^n}{2} & \frac{(-1)^n}{2}+\frac{3^n}{2}\end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

3. Ο πίνακας A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 8) = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda - 32$$

και συνεπώς από το Θεώρημα Cayley-Hamilton θα έχουμε

$$p(A) = A^3 - 12A^2 + 36A - 32I_3 = 0_{3,3}$$

ή ισοδύναμα

$$A\left(A^2 - 12A + 36I_3\right) = 32I_3 \Rightarrow A\left\{\frac{1}{32}\left(A^2 - 12A + 36I_3\right)\right\} = I_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{32}\left(A^2 - 12A + 36I_3\right) = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 12 & -4 & -4 \\ -4 & 12 & -4 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

Θα μπορούσε να λυθεί και στο Mathematica όπως παρακάτω :

```
In[1]:= a = {{4, 2, 2}, {2, 4, 2}, {2, 2, 4}}
```

Out[1]= $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

```
In[2]:= Inverse[a]
```

Out[2]= $\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$

Αν πολλαπλασιάσουμε την σχέση $A^{-1} = \frac{1}{32}\left(A^2 - 12A + 36I_n\right)$ με τον πίνακα A^{-1} θα πάρουμε :

$$A^{-1} = \frac{1}{32}\left(A^2 - 12A + 36I_3\right) \Rightarrow A^{-2} = \frac{1}{32}\left(A - 12I_3 + 36A^{-1}\right) \Rightarrow$$

$$A^{-2} = \frac{1}{32}\left(A - 12I_3 + 36\left\{\frac{1}{32}\left(A^2 - 12A + 36I_3\right)\right\}\right) = \frac{36}{32}A^2 - \frac{431}{32}A + \frac{1284}{32}I_3$$

■

9.4 Ελάχιστο Πολυώνυμο

9.4.1 Ορισμός

Με τον όρο ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *, ορίζουμε το πολυώνυμο με τον ελάχιστο βαθμό το οποίο μηδενίζεται από τον πίνακα* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *.* ■

Ένας εύκολος τρόπος υπολογισμού του ελάχιστου πολυωνύμου για μικρούς πίνακες δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

9.4.2 Θεώρημα

(α) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*. Ορίζουμε ως* $q(\lambda) = \det[\lambda I_n - A]$ *το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, και ως* $q_{n-1}(\lambda)$ *τον μέγιστο κοινό διαιρέτη όλων των τάξης* $n-1$ *οριζουσών του πίνακα* $\lambda I_n - A$*. Τότε ελάχιστο πολυώνυμο* $\psi(\lambda)$ *του πίνακα* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *δίνεται από τον τύπο :*

$$\psi(\lambda) = \frac{q(\lambda)}{q_{n-1}(\lambda)}$$

(β) Το ελάχιστο πολυώνυμο $\psi(\lambda)$ *ενός πίνακα* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *διαιρεί κάθε πολυώνυμο* $q(\lambda)$ *που μηδενίζει τον πίνακα A δηλ.* $q(A) = 0$.

(γ) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\psi(\lambda)$ *και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο* $q(\lambda) = \det[\lambda I_n - A]$ *έχουν τους ίδιους αμείωτους παράγοντες*[4]*.* ■

9.4.3 Παράδειγμα

Θεωρείστε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ο οποίος, σύμφωνα με το παράδειγμα 9.3.3, έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο :

$$q(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8$$

Θεωρείστε τον πίνακα

$$\lambda I_3 - A = \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

Το σύνολο των τάξης 3-1=2 οριζουσών του παραπάνω πίνακα είναι οι εξής :

$$\left\{(\lambda-2)^2, 0, 0, 0, (\lambda-2)^2, -(\lambda-2), 0, 0, (\lambda-2)^2\right\}$$

---

[4] Εαν δηλαδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο περιέχει τον όρο $(\lambda - \lambda_i)^k$ τότε το ελάχιστο πολυώνυμο θα περιέχει σίγουρα τον όρο $(\lambda - \lambda_i)$ υψωμένο σε δύναμη μικρότερη ή ίση του *k*.

Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των παραπάνω πολυωνύμων είναι $q_2(\lambda)=(\lambda-2)$. Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα 9.4.2α το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A δίνεται από τον τύπο :

$$\psi(\lambda)=\frac{q(\lambda)}{q_2(\lambda)}=\frac{(\lambda-2)^3}{(\lambda-2)}=(\lambda-2)^2$$

όπως άλλωστε φάνηκε στο παράδειγμα 9.3.3.

Ο πίνακας A μπορεί να οριστεί στο Mathematica ως

```
a = {{s - 2, -1, 0}, {0, s - 2, 0}, {0, 0, s - 2}}
{{-2 + s, -1, 0}, {0, -2 + s, 0}, {0, 0, -2 + s}}
```

Στη συνέχεια μέσω της συνάρτησης Minors[a,2] μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις ορίζουσες τάξης 2 του πίνακα A, και μέσω της Flatten να πάρουμε τις ορίζουσες αυτές ως μια λίστα

```
Minors[a, 2] // Flatten
{4 - 4 s + s^2, 0, 0, 0, 4 - 4 s + s^2, 2 - s, 0, 0, 4 - 4 s + s^2}
```

Εφαρμόζοντας (Apply) την συνάρτηση PolynomialGCD, που υπολογίζει τον μέγιστο κοινό διαιρέτη πολυωνύμων, στην παραπάνω λίστα (%) θα πάρουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των πολυωνύμων της παραπάνω λίστας

```
q2 = Apply[PolynomialGCD, %]
-2 + s
```

Συνεπώς το ελάχιστο πολυώνυμο θα είναι

```
Det[a] / q2 // Simplify
(-2 + s)^2
```

■

9.4.4 Παράδειγμα

Θεωρείστε τον πίνακα

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

ο οποίος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο :

$$q(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$$

Συνεπώς σύμφωνα με το Θεώρημα 9.4.2γ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και το ελάχιστο πολυώνυμο θα έχουν τους ίδιους αμείωτους παράγοντες και συνεπώς το ελάχιστο πολυώνυμο θα είναι είτε το $\psi(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$ είτε το $\psi(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-3)$. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι $\psi(A)=(A-I_3)(A-3I_3)=0$. ■

Ασκήσεις 9.4

1. Να υπολογιστεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο σταθερός του όρος του ελάχιστου πολυωνύμου είναι διάφορος του μηδέν.

3. Να δείξετε ότι οι πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

Ενδεικτικές λύσεις των ασκήσεων

1. Ο πίνακας A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο :
$$q(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-4)(\lambda-2)^2$$
Θεωρείστε τον πίνακα
$$\lambda I_3-A \ = \begin{pmatrix} \lambda-3 & 3 & -2 \\ 1 & \lambda-5 & 2 \\ 1 & -3 & \lambda \end{pmatrix}$$
Το σύνολο των τάξης 3-1=2 οριζουσών του παραπάνω πίνακα είναι οι εξής :
{(λ-6)(λ-2), 2(λ-2), 2(λ-2), -3(λ-2), (λ-2)(λ-1), 3(λ-2), 2-λ, λ-2, (λ-3)(λ-2)}
Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των παραπάνω πολυωνύμων είναι $q_2(\lambda)=(\lambda-2)$. Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα 9.4.2 το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A δίνεται από τον τύπο :
$$\psi(\lambda)=\frac{q(\lambda)}{q_2(\lambda)}=\frac{(\lambda-4)(\lambda-2)^2}{(\lambda-2)}=(\lambda-4)(\lambda-2)=\lambda^2-6\lambda+8 \qquad \blacksquare$$

2. Είναι γνωστό από το Θεώρημα 9.4.2 ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $\psi(\lambda)$ του πίνακα $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ δίνεται από τον τύπο $\psi(\lambda)=\dfrac{q(\lambda)}{q_{n-1}(\lambda)}$ και συνεπώς διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A δηλ.
$$\frac{q(\lambda)}{\psi(\lambda)}=\frac{q(\lambda)}{\dfrac{q(\lambda)}{q_{n-1}(\lambda)}}=q_{n-1}(\lambda)\Rightarrow q(\lambda)=\psi(\lambda)q_{n-1}(\lambda)$$
Παίρνοντας την τιμή της τελευταίας σχέσης στο 0, θα έχουμε:
$$q(0)=\psi(0)q_{n-1}(0)$$
Αν ο πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος, τότε από Θεώρημα 9.2.1β $q(0)\neq 0$ και συνεπώς $\psi(0)\neq 0$. $\blacksquare$

3. Έστω $\psi_A(\lambda),\psi_{A^T}(\lambda)$ τα ελάχιστα πολυώνυμα των A, A^T αντίστοιχα. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\psi_A(\lambda)=\psi_{A^T}(\lambda)$ ή ισοδύναμα ότι : α) $\psi_{A^T}(\lambda)/\psi_A(\lambda)$ και β) $\psi_A(\lambda)/\psi_{A^T}(\lambda)$.
(α) Αν $\psi_A(\lambda)=\psi_0^A+\psi_1^A\lambda+\cdots+\psi_q^A\lambda^q$ τότε
$$0=\psi_A(A)=\psi_0^A I_n+\psi_1^A A+\cdots+\psi_q^A A^q \overset{(\ )^T}{\Rightarrow}$$
$$\psi_0^A I_n+\psi_1^A A^T+\cdots+\psi_q^A\left(A^q\right)^T=0\Rightarrow$$
$$\psi_0^A I_n+\psi_1^A A^T+\cdots+\psi_q^A\left(A^T\right)^q=0\Rightarrow\psi_A\left(A^T\right)=0$$
Επειδή όμως το πολυώνυμο $\psi_{A^T}(\lambda)$ είναι το ελαχίστου βαθμού πολυώνυμο που ικανοποιεί την σχέση $\psi_{A^T}\left(A^T\right)=0$, κάθε άλλο πολυώνυμο $q(\lambda)$ που ικανοποιεί την σχέση $q(A)=0$ είναι πολλαπλάσιο του $\psi_{A^T}(\lambda)$ ή

διαφορετικά $\psi_{A^T}(\lambda)/q(\lambda)$. Συνεπώς από την παραπάνω σχέση θα έχουμε $\psi_{A^T}(\lambda)/\psi_A(\lambda)$. Προσπαθήστε όμοια να αποδείξετε το (β). ■

Ασκήσεις του Κεφαλαίου 9

1. Έστω οι πίνακες

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(α) Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του κάθε πίνακα καθώς και την αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα της κάθε ιδιοτιμής.
(β) Σύμφωνα με την άσκηση 3 στο κεφάλαιο 9.2 δύο όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Μπορείτε να ελέγξετε από τους δύο παραπάνω πίνακες αν ισχύει το αντίστροφο της πρότασης αυτής ;

2. Έστω οι πίνακες

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 12 & -13 & 6 \end{pmatrix}$$

Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του κάθε πίνακα καθώς και την αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα της κάθε ιδιοτιμής.

3. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση η οποία ορίζεται ως εξής :

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_1 + 4x_2 + 2x_3, x_1 + 2x_2 + x_3\right)$$

Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα της παραπάνω γραμμικής απεικόνισης καθώς και τους ιδιοχώρους που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή της.

4. Να βρεθεί πίνακας $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ που να έχει ως ιδιοδιανύσματα με αντίστοιχες ιδιοτιμές τα παρακάτω :

$$\left\{\lambda_1 = 3, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \left\{\lambda_2 = -1, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

5. Να αποδείξετε με ένα αντιπαράδειγμα[5] ότι η ιδιοτιμή του πίνακα $A+B$ δεν είναι κατά ανάγκη το άθροισμα μιας ιδιοτιμής του πίνακα A και μιας ιδιοτιμής του πίνακα B.

6. Να αποδείξετε με ένα αντιπαράδειγμα ότι η ιδιοτιμή του πίνακα AB δεν είναι κατά ανάγκη το γινόμενο μιας ιδιοτιμής του πίνακα A και μιας ιδιοτιμής του πίνακα B.

---

[5] Παράδειγμα που αποδεικνύει το αντίθετο της πρότασης.

7. Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ δηλ. $(\lambda I_n - A)x = 0, x \neq 0$. Ορίζουμε ως *γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα* του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ το διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^n$ για το οποίο ισχύει η σχέση $(\lambda I_n - A)y = x$.

   (α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\{x, y\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. (Υποθέστε το αντίθετο, ότι δηλαδή είναι γραμμικώς εξαρτημένα δηλ. υπάρχουν αριθμοί a, b τέτοιοι ώστε $ax + by = 0$ και προσπαθήστε να αποδείξετε το αντίθετο από αυτό που ζητάει η άσκηση).
   (β) Να υπολογίσετε το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A_1 στην άσκηση 1.

8. Έστω ένας πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. O *A* ονομάζεται *στοχαστικός πίνακας* αν :
   α) περιέχει μόνο θετικά στοιχεία, και β) αν το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του πίνακα είναι ίσο με την μονάδα δηλ. $a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} = 1, i = 1,2,...,n$. Να αποδείξετε ότι η $\lambda = 1$ αποτελεί ιδιοτιμή του πίνακα *A*. (<u>Σημείωση.</u> Αποδείξτε ότι το διάνυσμα $w = \begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}^T$ αποτελεί ένα ιδιοδιάνυσμα για την αντίστοιχη τιμή του λ)

9. Μια χρήσιμη υπολογιστική μέθοδος για τον υπολογισμό της μέγιστης κατ'απόλυτη τιμή ιδιοτιμής ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ δίνεται από τον παρακάτω αλγόριθμο :
   <u>Βήμα 1.</u> Διάλεξε ένα διάνυσμα $x_0, x_0 \neq 0$
   <u>Βήμα 2.</u> Έστω $x_{k+1} = Ax_k, k = 0,1,2,...$
   <u>Βήμα 3.</u> Έστω $\beta_k = \dfrac{x_k^T x_{k+1}}{x_k^T x_k}, k = 0,1,2,...$
   Κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες μπορεί να αποδειχθεί ότι η ακολουθία β_k τείνει (καθώς αυξάνουν οι τιμές του *k*) στην μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή ιδιοτιμή του *A*. Χρησιμοποιώντας ως αρχικό διάνυσμα το
   $$x_0 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
   Προσπαθήστε να υπολογίσετε τα $\beta_k, k = 0,1,2,3,4$ για τον πίνακα A_1 στην άσκηση 1.

10. Να υπολογίσετε τον αντίστροφο του πίνακα
   $$A = \begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\0 & 1 & 1\\-2 & -2 & -1\end{pmatrix}$$
   με την βοήθεια του Θεωρήματος Cayley-Hamilton.

11. Να υπολογίσετε την παράσταση $A^{2005} + 3A^{2004}$ όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

με την βοήθεια του Θεωρήματος Cayley-Hamilton.

12. Να υπολογίσετε την παράσταση e^{At} όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

13. Να υπολογίσετε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Απαντήσεις στις ασκήσεις του κεφαλαίου 9

1.

(α)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \left\{ \lambda_1 = 1, V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \left\{ \lambda_1 = 1, V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}$$

Ο πίνακας A_1 έχει ως ιδιοτιμή την $\lambda_1 = 1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και γεωμετρική πολλαπλότητα 1, ενώ ο πίνακας A_2 έχει ως ιδιοτιμή την $\lambda_1 = 1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και γεωμετρική πολλαπλότητα 2.

(β) Οι δύο πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2$.

Έστω ότι οι πίνακες A_1, A_2 είναι όμοιοι δηλ. υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ τέτοιος ώστε

$$A_2 = T^{-1} A_1 T \Leftrightarrow TA_2 = A_1 T \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

και άρα

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{11} = t_{11} + t_{21} \\ t_{12} = t_{12} + t_{22} \\ t_{21} = t_{21} \\ t_{22} = t_{22} \end{array} \right\} \Leftrightarrow t_{21} = 0, t_{22} = 0, t_{21} \in \mathbb{R}, t_{22} \in \mathbb{R}$$

Αν υπολογίσουμε όμως την ορίζουσα του πίνακα T θα δούμε ότι

$$\det[T] = t_{11}t_{22} - t_{21}t_{12} = 0$$

που μας οδήγησε σε άτοπο, λόγω του ότι υποθέσαμε ότι ο πίνακας T είναι αντιστρέψιμος δηλ. $\det[T] \neq 0$. ■

2.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \lambda_1 = 6, V_6 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}, \left\{ \lambda_2 = 3, V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \\ \left\{ \lambda_3 = 2, V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \end{array} \right\}$$

Ο πίνακας A_1 έχει ως ιδιοτιμές τις $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2$ με αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \left\{ \left\{ \lambda_1 = 6, V_6 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}, \left\{ \lambda_2 = 0, V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \right\}$$

Ο πίνακας A_2 έχει ως ιδιοτιμές τις $\lambda_1 = 6$ με αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 1 και $\lambda_2 = 0$ με αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 2.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \lambda_1 = 4, V_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}, \left\{ \lambda_2 = 3, V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \\ \left\{ \lambda_3 = 2, V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}, \left\{ \lambda_4 = 1, V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \end{array} \right\}$$

Ο πίνακας A_3 έχει ως ιδιοτιμές τις $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 1$ με αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 12 & -13 & 6 \end{pmatrix} \to \left\{ \left\{ \lambda_1 = 2, V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}, \left\{ \lambda_2 = 1, V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \right\}$$

Ο πίνακας A_4 έχει ως ιδιοτιμές τις $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και γεωμετρική πολλαπλότητα 1 αντίστοιχα η κάθε μια. ■

3. Παρατηρήστε ότι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης είναι ο πίνακας A_2 της άσκησης 2.

4. Προσπαθήστε να λύστε το σύστημα που προκύπτει από τις εξισώσεις :
$$Au_1 = \lambda_1 u_1, Au_2 = \lambda_2 u_2$$
Ο πίνακας που θα βγει είναι ο
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$ ■

5. Θεωρείστε τους πίνακες
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$
και δείξτε ότι δεν ισχύει η πρόταση. ■

6. Θεωρείστε τους ίδιους πίνακες με την άσκηση 4. ■

7. (α) Ας υποθέσουμε το αντίθετο από αυτό που μας ζητάει η άσκηση, ότι δηλαδή τα διανύσματα $\{x, y\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα δηλ. υπάρχουν αριθμοί $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$ τέτοιοι ώστε $ax + by = 0$. Πολλαπλασιάζοντας την σχέση αυτή με τον πίνακα A θα έχουμε :

$$aAx+bAy=0 \overset{Ax=\lambda x}{\Rightarrow} a\lambda x+bAy=0 \overset{Ay=\lambda y-x}{\Rightarrow}$$

$$a\lambda x+b\left(\lambda y-x\right)=0 \Rightarrow \lambda\left(ax+by\right)-bx=0 \overset{ax+by=0}{\Rightarrow}$$

$$bx=0 \Rightarrow x=0$$

το οποίο όμως είναι άτοπο λόγω του ότι το $x\neq 0$.

(β) Δείξαμε στην άσκηση 1, ότι το $x=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^T$ αποτελεί ιδιοδιάνυσμα του πίνακα Α που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda=1$. Συνεπώς θα έχουμε

$$\left(1\times I_n-A\right)y=x \Rightarrow \begin{pmatrix}1-1 & -1\\ 0 & 1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}-y_2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow y_2=-1, y_1\in\mathbb{R}$$

και συνεπώς το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα που ψάχνουμε είναι της μορφής :

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\ -1\end{pmatrix}, k\in\mathbb{R}$$ ■

8. Παρατηρήστε ότι

$$\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}}_{v}=\begin{pmatrix}a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}\\ a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}\\ \vdots\\ a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn}\end{pmatrix}=\underbrace{1}_{\lambda}\times\underbrace{\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}}_{v}$$ ■

9. Έστω

$$x_0=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

Τότε

$$x_1=Ax_0=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}, \beta_1=\frac{x_1^T x_0}{x_1^T x_1}=\frac{\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}}=\frac{3}{5}$$

$$x_2=Ax_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}, \beta_2=\frac{x_2^T x_1}{x_2^T x_2}=\frac{\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}}=\frac{7}{10}$$

$$x_3=Ax_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}, \beta_3=\frac{x_3^T x_2}{x_3^T x_3}=\frac{\begin{pmatrix}4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}}=\frac{13}{17}$$

$$x_4=Ax_3=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 1\end{pmatrix}, \beta_4=\frac{x_4^T x_3}{x_4^T x_4}=\frac{\begin{pmatrix}5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 1\end{pmatrix}}=\frac{21}{26}$$

....

$$x_n = Ax_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_n = \frac{x_n^T x_{n-1}}{x_n^T x_n} = \frac{\begin{pmatrix} n+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+2} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

και συνεπώς η μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή ιδιοτιμή του πίνακα A είναι η $\lambda = 1$. Πράγματι είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς (λόγω της διαγώνιας μορφής) ότι ο πίνακας A έχει ως ιδιοτιμή την $\lambda = 1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 2. ■

10. Ο πίνακας A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda - 2$$

και συνεπώς από το Θεώρημα Cayley-Hamilton θα έχουμε

$$p(A) = A^3 + 2A^2 + 3A - 2I_3 = 0_{3,3}$$

ή ισοδύναμα

$$A\left(A^2 + 2A + 3I_3\right) = 2I_3 \Rightarrow A\left\{\frac{1}{2}\left(A^2 + 2A + 3I_3\right)\right\} = I_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\left(A^2 + 2A + 3I_3\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$ ■

11. Έχουμε ότι

$$q(\lambda) = \lambda^{2005} + 3\lambda^{2004}$$

και

$$p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -4 & -4 \\ 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-3 \end{pmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda-2)^3$$

Ψάχνουμε λοιπόν για το υπόλοιπο $r(\lambda) = r_0 + r_1\lambda + r_2\lambda^2$ της διαίρεσης του $q(\lambda)$ με το $p(\lambda)$. Σύμφωνα με την παραπάνω θεωρία θα πρέπει το υπόλοιπο $r(\lambda)$ και το πολυώνυμο $q(\lambda)$, αλλά και οι παράγωγοι τους (πρώτη και δεύτερη), να έχουν τις ίδιες τιμές για την ιδιοτιμή 2 του πίνακα A δηλ.

$$q(2) = 2^{2005} + 3\times 2^{2004} = r_0 + 2r_1 + 4r_2 = r(2)$$

$$q'(2) = 2005\times 2^{2004} + 3\times 2004\times 2^{2003} = r_1 + 2r_2 = r'(2)$$

$$q''(2) = 2005\times 2004\times 2^{2003} + 3\times 2004\times 2003\times 2^{2002} = 2r_2 = r''(2)$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα πάρουμε :

$$r_0 = 2^{2005} - 4007\times 2^{2004} - 6\times 2004\times 2^{2003}$$

$$r_1 = 2005\times 2^{2004} - 4012008\times 2^{2003} - 3\times 2004\times 2003\times 2^{2002}$$

$$r_2 = \frac{1}{2}2004\times 2005\times 2^{2003} + \frac{3}{2}2004\times 2003\times 2^{2002}$$

και συνεπώς η τιμή που ψάχνουμε θα είναι

$$q(A)=r(A)=$$

$$=\left(2^{2005}-4007\times 2^{2004}-6\times 2004\times 2^{2003}\right)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+$$

$$+\left(2005\times 2^{2004}-4012008\times 2^{2003}-3\times 2004\times 2003\times 2^{2002}\right)\begin{pmatrix}2&4&4\\0&1&-1\\0&1&3\end{pmatrix}+$$ ■

$$+\left(\frac{1}{2}2004\times 2005\times 2^{2003}+\frac{3}{2}2004\times 2003\times 2^{2002}\right)\begin{pmatrix}2&4&4\\0&1&-1\\0&1&3\end{pmatrix}^2$$

12. Η συνάρτηση

$$q(\lambda)=e^{\lambda}$$

συγκλίνει σε όλο τον πραγματικό άξονα και συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε την μεθοδολογία που έχουμε αναπτύξει παραπάνω. Ο πίνακας A έχει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο :

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\0&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-2=(\lambda-2)(\lambda+1)$$

Ψάχνουμε λοιπόν για ένα πολυώνυμο $r(\lambda)=r_0+r_1\lambda$ το οποίο θα έχει τις ίδιες τιμές με το $q(\lambda)$ στις ιδιοτιμές του πίνακα A δηλ.

$$q(2)=e^2=r_0+2r_1=r(2)$$

$$q(-1)=e^{-1}=r_0-r_1=r(-1)$$

λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα έχουμε :

$$\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_0\\r_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^2\\e^{-1}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}r_0\\r_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}e^2\\e^{-1}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}r_0\\r_1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^2\\e^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\left(e^2+2e^{-1}\right)\\\frac{1}{3}\left(e^2-e^{-1}\right)\end{pmatrix}$$

και συνεπώς η τιμή που ψάχνουμε θα είναι

$$q(A)=r(A)=\frac{1}{3}\left(e^2+2e^{-1}\right)\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\left(e^2-e^{-1}\right)\begin{bmatrix}2&1\\0&-1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}e^2&\frac{1}{3}\left(e^2-e^{-1}\right)\\0&\frac{1}{3}e^{-1}\end{bmatrix}$$ ■

13. Το ελάχιστο πολυώνυμο που θα υπολογίσετε είναι $p(\lambda)=(\lambda-2)^2$. ■

Απαντήσεις στις ασκήσεις αυτοαξιολόγησης του κεφαλαίου 9

9.1.5 Άσκηση αυτοαξιολόγησης

Τα x_1, x_4 είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα *A* που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές *λ=1* και *λ=2* αντίστοιχα π.χ. $Ax_1 = 1 \times x_1, Ax_4 = 2x_4$.

9.1.14 Άσκηση αυτοαξιολόγησης

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \left\{ \left\{ \lambda_1 = -1, V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}, \left\{ \lambda_2 = 0, V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \right\}$$

Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και γεωμετρική πολλαπλότητα 1, ενώ η $\lambda_2 = 0$ έχει αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

Ορίζουμε τον πίνακα *A*

```
In[1]:= a = {{-2, -1, 0}, {0, 1, 1}, {-2, -2, -1}}
```

Out[1]= $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *A*

```
In[2]:= Eigensystem[a]
```

Out[2]= $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ \{1, -1, 2\} & \{0, 0, 0\} & \{1, -2, 2\} \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \left\{ \left\{ \lambda_1 = 2, V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}, \left\{ \lambda_2 = 3, V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \right\}$$

Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και γεωμετρική πολλαπλότητα 1, ενώ η $\lambda_2 = 3$ έχει αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

Ορίζουμε τον πίνακα *B*

```
In[1]:= b = {{2, 1, 0}, {0, 2, 0}, {0, 0, 3}}
```

Out[1]= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *B*

```
In[2]:= Eigensystem[b]
```

Out[2]= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ \{0, 0, 1\} & \{1, 0, 0\} & \{0, 0, 0\} \end{pmatrix}$

$$C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\rightarrow\left\{\left\{\lambda_1=-\sqrt{5},V_{-\sqrt{5}}=\left\langle\begin{pmatrix}2-\sqrt{5}\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle\right\},\left\{\lambda_1=\sqrt{5},V_{\sqrt{5}}=\left\langle\begin{pmatrix}2+\sqrt{5}\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle\right\}\right\}$$

Η ιδιοτιμή $\lambda_1=-\sqrt{5}$ έχει αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 1, ενώ η $\lambda_2=\sqrt{5}$ έχει αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

Ορίζουμε τον πίνακα C

```
In[1]:= c = {{2, 1}, {1, -2}}
```

Out[1]= $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα C

```
In[2]:= Eigensystem[c]
```

Out[2]= $\begin{pmatrix}-\sqrt{5} & \sqrt{5}\\ \{2-\sqrt{5},1\} & \{2+\sqrt{5},1\}\end{pmatrix}$

9.2.6 Άσκηση αυτοαξιολόγησης

Σύμφωνα με το Θεώρημα 9.2.4 θα πρέπει το ίχνος του πίνακα A, δηλαδή το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου να είναι ίσο με το άθροισμα των ιδιοιτμών δηλ. $\lambda_1+\lambda_2=1+3=4$, ενώ η ορίζουσα του πίνακα A να είναι ίση με το γινόμενο των ιδιοτιμών δηλ. $\lambda_1\times\lambda_2=1\times3-1\times(-1)=4$. Συνεπώς οι μόνες ιδιοτιμές που ικανοποιούν το σύστημα αυτό είναι οι $\lambda_1=\lambda_2=2$. ■

9.3.1.2.2 Άσκηση αυτοαξιολόγησης

Έχουμε ότι

$$q(\lambda)=\lambda^{20}$$

και

$$p(\lambda)=\det\begin{bmatrix}\lambda+3 & -6\\ -1 & \lambda-2\end{bmatrix}=\lambda^2+\lambda=\lambda(\lambda+1)$$

Ψάχνουμε λοιπόν για το υπόλοιπο $r(\lambda)=r_0+r_1\lambda$ της διαίρεσης του $q(\lambda)$ με το $p(\lambda)$. Σύμφωνα με την παραπάνω θεωρία θα πρέπει το υπόλοιπο $r(\lambda)$ και το πολυώνυμο $q(\lambda)$ να έχουν τις ίδιες τιμές για τις ιδιοτιμές του πίνακα A δηλ.

$$q(0)=0^{20}=r_0+0\times r_1=r(0)$$

$$q(-1)=(-1)^{20}=r_0-r_1=r(-1)$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα πάρουμε :

$$r_0=0$$

$$r_1=-(-1)^{20}$$

και συνεπώς η τιμή που ψάχνουμε θα είναι

$$q(A)=r(A)=0\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-(-1)^{20}\begin{bmatrix}-3 & 6\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -6\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$ ■

9.3.1.2.4 Άσκηση αυτοαξιολόγησης

Έχουμε ότι

$$q(\lambda)=\lambda^6$$

και

$$p(\lambda)=\det\begin{bmatrix}\lambda-1 & -1\\ 1 & \lambda-3\end{bmatrix}=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2$$

Ψάχνουμε λοιπόν για το υπόλοιπο $r(\lambda)=r_0+r_1\lambda$ της διαίρεσης του $q(\lambda)$ με το $p(\lambda)$. Σύμφωνα με την παραπάνω θεωρία θα πρέπει το υπόλοιπο $r(\lambda)$ και το πολυώνυμο $q(\lambda)$, αλλά και οι παράγωγοι τους, να έχουν τις ίδιες τιμές για την ιδιοτιμή 3 του πίνακα A δηλ.

$$q(2)=2^6=r_0+2r_1=r(2)$$

$$q'(2)=6\times 2^5=r_1=r'(2)$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα πάρουμε :

$$r_0=-5\times 2^6$$

$$r_1=3\times 2^6$$

και συνεπώς η τιμή που ψάχνουμε θα είναι

$$q(A)=r(A)=-5\times 2^6\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+3\times 2^6\times\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2^7 & 3\times 2^6\\ -3\times 2^6 & 2^8\end{bmatrix}$$ ■

9.3.1.2.6 Άσκηση αυτοαξιολόγησης

Η συνάρτηση

$$q(\lambda)=\sin(\lambda)$$

συγκλίνει σε όλο τον πραγματικό άξονα και συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε την μεθοδολογία που έχουμε αναπτύξει παραπάνω. Ο πίνακας A έχει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο :

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-5 & -8\\ 2 & \lambda+5\end{vmatrix}=\lambda^2-9=(\lambda-3)(\lambda+3)$$

Ψάχνουμε λοιπόν για ένα πολυώνυμο $r(\lambda)=r_0+r_1\lambda$ το οποίο θα έχει τις ίδιες τιμές με το $q(\lambda)$ στις ιδιοτιμές του πίνακα A δηλ.

$$q(3)=\sin(3)=r_0+3r_1=r(3)$$

$$q(-3)=\sin(-3)=r_0-3r_1=r(-3)$$

λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα έχουμε :

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_0\\ r_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin(3)\\ \sin(-3)\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}r_0\\ r_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\sin(3)\\ \sin(-3)\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}r_0\\ r_1\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin(3)\\ \sin(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(\sin(3)+\sin(-3)\right)\\ \frac{1}{6}\left(\sin(3)-\sin(-3)\right)\end{pmatrix}$$

και συνεπώς η τιμή που ψάχνουμε θα είναι

$$q(A)=r(A)=\frac{1}{2}\left(\sin(3)+\sin(-3)\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\frac{1}{6}\left(\sin(3)-\sin(-3)\right)\begin{bmatrix}5 & 8\\ -2 & -5\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{8}{6}\sin(3)-\frac{2}{6}\sin(-3) & \frac{8}{6}\left(\sin(3)-\sin(-3)\right)\\ -\frac{2}{6}\left(\sin(3)-\sin(-3)\right) & -\frac{2}{6}\sin(3)+\frac{8}{6}\sin(-3)\end{bmatrix}$$ ■